Digitale Bibliothek Braunschweig

Eine Weiterführung der Variations- und Funktionalrechnung für die Anwendung in den Optimierungsverfahren

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 40, 1988, S.39-85

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Eine Weiterführung der Variations- und Funktionalrechnung für die Anwendung in den Optimierungsverfahren

Von **Bekir Dizioğlu,** Braunschweig

(Eingegangen am 2.9.1988)

Zusammenfassung

Eine Weiterführung der Variations- und Funktionalrechnung für die Anwendung in den Optimierungsverfahren

Bisher stellte man sich in der Variationsrechnung im wesentlichen die Aufgabe, die Extrema von einzelnen Funktionalen an sich, wenn nötig unter Beachtung gewisser Nebenbedingungen zu ermitteln, nämlich im einfachsten Falle die Aufgabe, die Extremwerte ein- oder mehrfacher Integrale festzustellen, weiter die isoperimetrischen Lagrangeschen und Mayerschen Probleme. Hier wird ein Schritt weiter gegangen und Funktionen solcher Funktionale ins Auge gefaßt und demgemäß Extremwerte von Funktionalfunktionen ermittelt.

Diese Erweiterungen der klassischen Variations- und Funktionalrechnung eröffnet eine weitere Anwendungsmöglichkeit der genannten Theorien in den Optimierungsverfahren der Physik und der Technik, die immer mehr an Bedeutung gewinnen.

Summary

An extension of the classical variation and Functional-analysis for use on the optimization

The well known problems of the calculus of variation and Functional-analysis consists in the determination of the extrema from functionals with the boundry conditions and also the isoperimetric problems of Lagrange and Mayer.

The aimes of this paper is in an extension of their in the functions of functionals and therefore in the determination of the extrem-values of the Functional-functions.

1. Einleitung

Die klassische Variationsrechnung, wie sie jetzt vor uns liegt [1,2], gestattet eine naheliegende Weiterführung, die nicht nur eine Fülle neuartiger Probleme der analytischen Behandlung zugänglich macht, sondern auch der größeren Allgemeinheit der Methoden wegen die heute geläufigen in einem neuen Licht erscheinen läßt. Bisher stellte man sich in der Variationsrechnung im wesentlichen nur die Aufgabe, die Extrema von einzelnen Funktionalen an sich, wenn nötig unter Beachtung gewisser Nebenbedingungen zu ermitteln, nämlich im einfachsten Falle die Aufgabe, die Extremwerte ein-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

oder mehrfacher Integrale festzustellen, weiter die isoperimetrischen Lagrangeschen und Mayerschen Probleme. Wir wollen jetzt einen Schritt weiter gehen, Funktionen solcher Funktionale ins Auge fassen und demgemäß Extremwerte von Funktionalfunktionen ermitteln.

2. Funktion eines Funktionals

Zu Beginn untersuchen wir die Funktion $\Phi(J)$ eines einzigen Funktionals, das etwa in der Form

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx$$

als ein Funktional der variierbaren Funktion $y(x)$ gegeben sein soll; $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ wollen wir der Einfachheit halber fest annehmen, etwa wie wenn J die Bogenlänge einer variierbaren Kurve und den festen Endpunkten P_1 und P_2. Hier wie im folgenden wollen wir dabei alle Funktionen als hinreichend oft differenzierbar, alle Funktionale als hinreichend oft variierbar voraussetzen. Bekanntlich ist dann die erste Variation von J

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y\,dx$$

und daher die erste Variation von $\Phi(J)$

$$\delta\Phi(J) = \Phi'(J)\delta J = \Phi'(J) \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y\,dx.$$

Sind für J keine willkürlichen Gebietsbeschränkungen, etwa auf ein bestimmtes Intervall vorgeschrieben, so daß wir auf dadurch bedingte Randextreme nicht zu achten brauchen, so erweist sich für das Eintreten eines Extremums als notwendig, wenn auch nicht als hinreichend, daß $\delta\Phi(J)$ verschwinde. Es muß also entweder $\Phi'(J)$ oder δJ gleich Null sein.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall, der sich nach den üblichen Methoden erledigen läßt. Besitzt die Gleichung $\Phi'(J) = 0$ eine Lösung $J = J^{(e)}$ und $\Phi(J)$ in der Umgebung von $J^{(e)}$ die Taylorentwicklung

$$\Phi(J) = \Phi[J^{(e)}] + \frac{1}{m!} \Phi^{(m)} [J^{(e)}] [J-J^{(e)}]^m + \ldots\ldots$$

mit $\Phi^{(m)}[J^{(e)}] \neq 0$ und natürlich $m \geq 2$, so erreicht, wenn m gerade ist, $\Phi(J)$ in $J^{(e)}$ ein Minimum, wenn $\Phi^{m}[J^{(e)}] > 0$, ein Maximum, wenn $\Phi^{(m)}[J^{(e)}] < 0$, aber kein Extremum, wenn m ungerade ist, vorausgesetzt – und das ist das, was hier zu dem aus der Differentialrechnung Wohlbekannten hinzutritt –, daß die Integralgleichung für $y(x)$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\, dx = J^{(e)} \tag{1}$$

wenigstens eine Lösung besitzt. Wir wollen dann im folgenden oft kurz sagen, der Wert $J^{(e)}$ sei durch das Funktional J erreichbar. Übrigens bemerken wir sofort, daß (1) im allgemeinen ein ganzes Kontinium von Lösungen zuläßt.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß $\delta J = 0$, y(x) also in bekannter Weise ein Integral der Eulerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}, = 0 \tag{2}$$

ist. Die den vorgeschriebenen Randbedingungen in P_1 und P_2 genügende Lösung von (2), die wir $y^{(e)}(x)$ nennen wollen, soll außer dieser notwendigen auch hinreichenden Bedingungen für das Eintreten eines Extremums, etwa der Weierstraßschen oder Legendreschen, genügen. Sollte es sich ergeben, daß das Extremum nur schwach ist, so wollen wir die Vergleichsfunktionen hinsichtlich $y'(x)$, und sollte es nur relativ sein, außerdem noch hinsichtlich y(x) selbst so stark einschränken, daß $y^{(e)}(x)$ in dem so eingeengten Bereich allen Bedingungen für das Vorliegen eines absoluten Extremums genügt. Aus demselben Grunde wollen wir auch die Punkte P_1 und P_2 auf der Extremalen beieinander wählen, daß zwischen ihnen nicht nur kein P_1 oder P_2 gehöriger konjugierter Punkt liegt, sondern darüber hinaus das absolute Extremum gesichert ist. Genügt $y^{(e)}(x)$ allen eben aufgezählten Bedingungen, so nimmt das Funktional J für $y^{(e)}(x)$ einen Grenzwert $J^{(g)}$ an, jenseits dessen keine für J erreichbaren Werte mehr liegen. $J^{(g)}$ stellt also keine willkürliche, sondern eine natürliche und auch erreichbare Grenze für den Wertevorrat von J dar, auf der $\Phi(J)$ ein Randextremum aufweist, da wir $\Phi(J)$ nicht als konstant annehmen wollen. Wir stellen demnach fest, daß $\Phi'(J) = 0$ unter Umständen innere, $\delta J = 0$ hingegen immer Randextreme zur Folge hat, wobei natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß beide Arten von Extremen gelegentlich zusammenfallen können, nämlich wenn gleichzeitig $\Phi'(J) = 0$ und $\delta J = 0$ ist.

Trotz der Trivialität der vorstehenden Ausführungen folgendes einfache Beispiel I zur Erläuterung:

Es sei

$$f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$$

und die Aufgabe gestellt, $\Phi(J) = (J\text{-}L)^2$ – etwa im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate – zu einem Minimum zu machen. L sei hierin eine positive, beliebig vorgegebene Konstante. Ist l der geradlinige Abstand von P_1 und P_2, so ist $J^{(g)} = l$ und nur das Gebiet $J \geq l$ für J erreichbar. Bei der Lösung der Extremumsaufgabe sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) Es sei $L > l$. Wegen $\Phi'(L) = 0$ besitzt dann $\Phi(J)$ für $J = L$ ein inneres absolutes Minimum, nämlich Null, zu dem offenbar ein ganzes Kontinuum von Funktionen y(x) gehört, die (1) für

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$$

und $J^{(e)} = L$ lösen; außerdem weist aber $\Phi(J)$ noch das zu $\delta J = 0$ und $J = J^{(g)} = l$ gehörige relative Randmaximum $(L-l)^2$ auf, dem eindeutig die Lösung

$$y^{(e)} = \frac{1}{x_2-x_1} \cdot [y_2(x-x_1) - y_1(x-x_2)],$$

d.h. die geradlinige Verbindung von P_1 und P_2 entspricht.

2) Es sei $L<l$. Dann ist der Wert L für das Funktional J nicht erreichbar, und das innere, durch $\Phi'(J)=0$ gekennzeichnete Minimum fällt fort. Jetzt liefert nur der aus $\delta J = 0$ folgende Wert $J = J^{(g)} = l$ mit dem zugehörigen $y^{(e)}(x)$ ein Randextremum, und zwar ein absolutes Minimum (nicht wie unter 1) ein relatives Maximum. Ist schließlich

3) $L=l$, so ist sowohl für $J=l$, $\Phi(J)=0$ als auch $\delta J = 0$, d.h. beide Extreme vereinigen sich zu dem zu erwartenden absoluten Minimum an der Grenze des Variabilitätsbereiches von J, nämlich Null, das bei geradliniger Verbindung von P_1 und P_2 erreicht wird.

Bei dem einfachen Sachverhalt ist eine Skizze, in der J als Abszisse und $\Phi(J)$ als Ordinate eines kartesischen Koordinatensystems, $\Phi(J)$ also durch eine die J-Achse im Punkte $J=L$ berührende Parabel dargestellt wird, wohl nicht nötig, aber doch durch die Anschauung recht instruktiv.

Wir bemerken bei diesen einfachen Überlegungen eine weitgehende Ähnlichkeit mit Erscheinungen, die aus der Differentialrechnung wohlbekannt sind. Handelt es sich nämlich darum, die Extremwerte einer zusammengesetzten Funktion $\Phi[\varphi(x)]$ zu bestimmen, so haben wir eine ganz ähnliche Gleichung $\Phi[\varphi(x)]\,\varphi'(x)=0$ zu lösen, die wir, um die Analogie auch formal deutlich hervortreten zu lassen, in der Form schreiben wollen: $d\Phi[\varphi] = \Phi[\varphi]d\varphi = 0$. Die Extremstellen zerfallen hier ebenfalls in zwei Gruppen, nämlich in die Nullstellen von $\Phi[\varphi]$ und die von $\varphi'(x)$ oder $d\varphi$, und diese letzten gehen bei Einführung von φ an Stelle von x als unabhängiger Veränderlicher wie in unserem Falle in Randextremstellen über. Liegt z.B. die Funktion Φ (cos x) einerseits und die Nullstellen von sin x, also $x = n\pi$ anderseits. Diese zweite Gruppe von Extremstellen verwandelt sich wegen $-1 \leq \varphi \leq +1$ bei der unabhängigen Veränderlichen φ in die Randextremstellen $\varphi = \pm 1$ mit den früher inneren Extremen $\Phi\,(\pm 1)$. Wir sehen daraus, daß es in der Theorie der reellen Funktionen grundsätzlich nicht möglich ist, eine scharfe Trennung zwischen inneren und Randextremen vorzunehmen, weil diese nur davon abhängt, welche unabhängige Veränderliche wir zufällig zu wählen belieben. Z.B. gehen bei der Substitution $f(x)=z$ für irgend ein Monotonieintervall von f(x) benachbarte Nullstellen von f(x) in Randstellen der entsprechenden z-Intervalle über, und macht man diese Substitution für jedes Monotonieintervall, so verwandelt man damit alle Extreme von f(x) in Randextreme der entsprechenden z-Intervalle. Ganz entsprechend kann man natürlich umgekehrt auch alle Randextreme durch geeignete Wahl der unabhängigen Veränderlichen zu inneren Extremen machen. In unserem Falle $\delta\Phi = \Phi'(J)\delta J$ besteht aber gegenüber diesen Verhältnissen trotz der for-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

malen Analogie ein gewisser Unterschied, da ja J nicht wieder eine Funktion einer weiteren Variablen x, sondern eben ein Funktional von y(x) ist, so daß die in dem Vergleichsfalle vorhandene Freizügigkeit in der Variablenwahl wegfällt. Man kann daher hier doch mit einer gewissen Berichtigung von einem reinen „Funktionsextremum" entsprechend der Gleichung $\Phi'(J)=0$ und einem reinen „Funktionalextremum" entsprechend der Gleichung $\delta J=0$ reden. Indessen zeigt sich, daß man beim Übergang zu Funktionen mehrerer Funktionale diese strenge Unterscheidung nicht mehr aufrecht erhalten kann, da auch Extreme eines gemischten Typus auftreten, die aber teils Funktions- teils Funktionalextreme sind.

3. Funktionen mehrerer Funktionale

Wir gehen jetzt dazu über, Funktionen mehrerer voneinander unabhängiger Funktionale $J_1[y_1(x)], J_2[y_2(x)] \ldots\ldots J_n[y_n(x)]$ unter den oben gemachten Voraussetzungen zu betrachten, beschränken uns aber zunächst auf den Fall $n=2$ mit Rücksicht auf die dann mögliche geometrisch-anschauliche Ausdeutung im dreidimensionalen Raum. Es liege also eine Funktion $\Phi(J_1,J_2)$ der beiden von $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ abhängigen Funktionale J_1 bzw. J_2 vor. Wir nehmen an, daß für gewisse den zugehörigen Eulerschen Differentialgleichungen nebst Randbedingungen genügende Funktionen $y_1^{(e)}(x), y_2^{(e)}(x)$ die Größen J_1 und J_2 gegenüber gewissen Vergleichsfunktionen absolute Minima $J_1^{(g)}$ und $J_2^{(g)}$ aufweisen sollen. Sollten stattdessen Maxima vorhanden sein, so denken wir sie uns in einfachster Weise durch Vorzeichensinn betr. der Funktionale in Minima übergeführt. Dann ist also für J_1 und J_2 der Quadrant $J_1 \geq J_1^{(g)}$, $J_2 \geq J_2^{(g)}$ der J_1J_2-Ebene – die Ecke mit den Koordinaten $J_1^{(g)}, J_2^{(g)}$ sei Q – erreichbar. Wir bezeichnen sein Inneres, das Grundgebiet, mit G (siehe Bild 1).

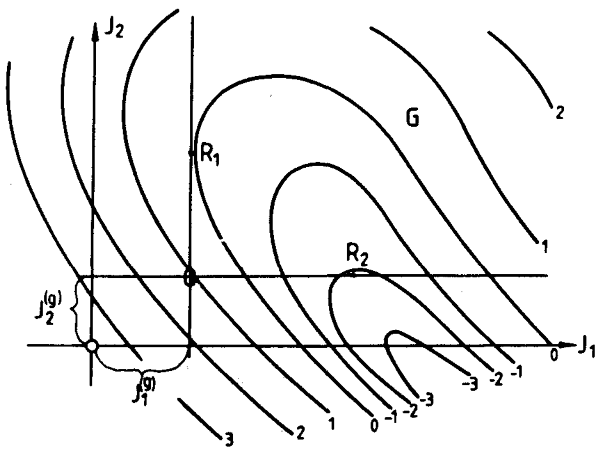

Bild 1:
Anschauliche Deutung der Funktionen von zwei unabhängigen Funktionalen im dreidimensionalen Raum mittels ihrer kotierten Schichtlinien (Isohypsen).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Über diesem Gebiet G konstruieren wir, indem wir $\Phi(J_1 J_2)$ als dritte rechtwinklige Koordinate auftragen, die die Funktionalfunktion $\Phi(J_1 J_2)$ darstellende Fläche und bilden sie am besten durch Einzeichnen ihrer kotierten Schichtenlinien (Isohypsen) auf die $J_1 J_2$-Ebene ab. Zur Ermittlung der Extremwerte von $\Phi(J_1 J_2)$ ist

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\,\delta J_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\,\delta J_2 = 0$$

zu setzen, was bei willkürlichen Variationen $\delta J_1, \delta J_2$ offenbar

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial J_2} = 0$$

zur Folge hat. Sind diese beiden Gleichungen durch ein Wertsystem $J_1^{(e)}, J_2^{(e)}$ erfüllt, gehört der zugehörige Bildpunkt P dem Gebiet G an, und ist ferner die quadratische Form der Glieder zweiter Ordnung der Taylorentwicklung von $\Phi(J_1 J_2)$ in der Umgebung von P definit, so besitzt $\Phi(J_1 J_2)$ in P ein Extremum. Die zugehörigen unabhängigen Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ müssen natürlich erst wieder durch Lösen der entsprechenden Integralgleichungen vom Typus (1) gefunden werden. Ein solches Extremum ist ein reines Funktionsextremum. Ein reines Funktionalextremum haben wir hingegen möglicherweise im Punkte Q, in dem, da dort $J_1 = J_1^{(g)}$ und $J_2 = J_2^{(g)}$ ist, sowohl δJ_1 als auch δJ_2 verschwinden. Ob ein Extremum vorliegt oder nicht, klären wir am einfachsten so, daß wir die Isohypse von $\Phi(J_1 J_2)$ durch Q konstruieren. Verläuft sie wie in Bild 1 in einer gewissen Umgebung von Q ganz außerhalb von G, was sich, wenn es nicht aus der Anschauung folgt, im allgemeinen durch Reihenentwicklung leicht zeigen läßt, so liegt gewiß ein Extremum vor; denn die Punkte der Fläche $\Phi(J_1 J_2)$ senkrecht über der zu G gehörigen Teilumgebung von G liegen dann entweder sämtlich über oder unter dem Flächenpunkt senkrecht über Q. Umgekehrt liegt, wie man sofort sieht, kein Funktionalextremum in Q vor, wenn die Isohypse durch Q von Q ausgehend irgendwie in das Gebiet G hineinführt. Ist ein solches Funktionalextremum vorhanden, so wird es von den beiden Funktionen $y_1^{(e)}(x)$ und $y_2^{(e)}(x)$ geliefert, welche die aus $\delta J_1 = 0$ und $\delta J_2 = 0$ folgenden Eulerschen Differentialgleichungen mit den vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigen. Es gibt aber noch eine dritte Möglichkeit des Verschwindens von $\delta\Phi$, nämlich, daß entweder

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} = 0 \text{ und } \delta J_2 = 0 \text{ oder } \frac{\partial\Phi}{\partial J_2} = 0 \text{ und } \delta J_1 = 0$$

ist. $\delta J_2 = 0$ bedeutet, daß wir uns auf der Geraden $J_2 = J_2^{(g)}$ bewegen, also $y_2 = y_2^{(e)}(x)$ zu setzen haben, und die dazu noch zu erfüllende Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} = 0$$

für $J_2 = J_2 Q$ spricht, wie man nun sieht, lediglich die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür aus, daß auf dieser Geraden beim Fortschreiten längs ihrer ein Extremum, also möglicherweise ein Randextremum von $\Phi(J_1 J_2)$ auf der Begrenzung von G auftritt. Reguläre Punkte vorausgesetzt, berührt in einem solchen Punkte die

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

zugehörige Isohypse den Rand von G. Verläuft sie in einer gewissen Umgebung des Berührungspunktes außerhalb (innerhalb) von G, so liegt gewiß ein (kein) Extremum vor, und aus der Kotierung ist leicht zu ersehen, welcher Art es ist. Entsprechendes gilt für die Gerade $J_1 = J_1^{(g)}$ im Falle

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = 0 \text{ und } \delta J_1 = 0.$$

So ersehen wir z.B. aus Bild 1 sofort, daß bei der dort dargestellten Sachlage ein Extremum wohl im Punkte R_2, nicht aber im Punkte R_1 vorhanden ist, und aus der Kotierung folgt, daß es sich im Punkte R_2 um ein Minimum handelt. Damit haben die gemischten Extreme, die Funktionsfunktionalextreme, ebenfalls ihre anschauliche Deutung gefunden.

Wie sich die Verhältnisse beim Übergang zu n voneinander unabhängigen Funktionalen gestalten, liegt jetzt klar auf der Hand. Durch die aus $\delta J_k[y_k(x)] = 0$ für die unabhängigen Funktionen $y_k(x)$ folgenden Eulerschen Differentialgleichungen mit den vorgeschriebenen Randbedingungen werden n Funktionen $y_k^{(e)}(x)$ festgelegt, die bei entsprechenden Beschränkungen hinsichtlich der Vergleichsfunktionen für die zugehörigen Funktionale J_k die absoluten Minima $J_k^{(g)}$ liefern sollen, so daß für die Funktionale J_k nur die das Grundgebiet G erfüllenden Punkte der (n-1)-dimensionalen räumlichen Ecke $J_k \geq J_k^{(g)}$ $(K = 1, 2 \ldots n)$ erreichbar sind. Ihr Eckpunkt sei wieder Q. Für die erste Variation von $\Phi(J_1, J_2 \ldots J_n)$ ergibt sich

$$\delta\Phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\delta J_k} \delta J_k.$$

Ihr für das Eintreten eines Extremums notwendige Verschwinden wird erstens bewirkt durch das Verschwinden sämtlicher Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_k} \quad (k = 1, 2 \ldots n).$$

Erfolgt dies in einem inneren Punkt P von G und ist die quadratische Form der Glieder zweiter Ordnung der Taylorentwicklung von Φ in der Umgebung von P definit, so besitzt Φ in P ein Extremum, und zwar ein reines Funktionsextremum. Zweitens besteht im Punkte Q, wo alle $\delta J_k = 0$ sind, und daher ebenfalls $\delta\Phi = 0$ ist, die Möglichkeit des Zustandekommens eines reinen Funktionalextremums. Es kann aber auch drittens $\delta\Phi$ dadurch zu Null gemacht werden, daß man m Glieder der rechten Seite durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen und die restlichen n-m Glieder durch Nullsetzen der Variationen der Funktionale zum Verschwinden bringt. Dadurch erhält man die möglicherweise vorhandenen gemischten Funktionsfunktionalextreme von Φ auf dem Rande von G, zu denen sich das reine Funktionalextremum in Q begrifflich zugesellt. Es wird so die ganze Begrenzung von G, bestehend aus den begrenzenden linearen Mannigfaltigkeiten 0-ter, 1., 2. ... usw. bis zur (n-1)-ten Dimension einschließlich – 0-ter Dimension ist der Punkt Q – nach Randextremen abgesucht. Zu hin-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

reichenden Bedingungen gelangen wir wieder am einfachsten durch Heranziehen der (n-1)-dimensionalen Isohypsen von $\Phi(J_1, J_2 \ldots J_n)$, der Oberflächen $\Phi = $ constans. Verlaufen sie in einer gewissen Umgebung der ermittelten möglichen Randextremstellen, in denen sie – mit Ausnahme des Punktes Q – unter Voraussetzung des Vorliegens nur regulärer Punkte den Rand von G berühren, ganz außerhalb von G, so liegen in den betreffenden Punkten Extreme vor, im entgegengesetzten Falle hingegen nicht.

Wir bemerken, daß unsere Überlegungen offenbar ganz unabhängig davon sind, ob die Funktionale $J_1, J_2 \ldots J_n$ die besondere Form

$$\int_{x_1}^{x_2} f_k(x, y, y')\,dx$$

mit festem $y(x_1)$ und $y(x_2)$ haben. Sie können auch in Parameterform gegeben sein bei festen oder veränderlichen Grenzen, es können höhere Ableitungen im Integranden auftreten, ferner können wie bei den isoperimetrischen und Legrangeschen Problemen Nebenbedingungen vorgeschrieben sein; ja selbst Funktionale, wie sie in den allgemeinen Mayerschen Problemen auftreten, ordnen sich unsere Überlegungen unter. Wir brauchen nur zu beachten, daß für die δJ_k zulässige, d.h. mit den Nebenbedingungen verträgliche Variationen in Rechnung gesetzt werden. Nichts hindert uns ferner anzunehmen, daß die Funktionale $J_1 \ldots J_n$ Gebilde verschiedener Dimension, also etwa mehrfache Integrale von verschiedener Vielfachheit sind. Immer kommen wir mit den entwickelten Methoden zum Ziel; denn die Funktionale spielen hierbei nur die Rolle unabhängiger Veränderlichen, und die Zahl der variierbaren Funktionen, von denen sie abhängen, macht sich erst bemerkbar, wenn als Folgerung aus den erfüllten Extremumsbedingungen schließlich noch die Integralgleichungen oder die Eulerschen Differentialgleichungen zu lösen sind. Das sind aber Aufgaben, die mit der besonderen Struktur der Funktion $\Phi(J_1, J_2 \ldots J_n)$ nichts zu tun haben. Daher ist es auch ohne weiteres möglich, neben den Funktionalen $J_1 \ldots J_n$ gewöhnliche unabhängige Veränderliche $z_1, z_2 \ldots z_n$ in Φ zuzulassen, ohne daß sich etwas Wesentliches ändert. Liegt also eine Funktion $\Phi(z_1, z_2 \ldots z_n, J_2 \ldots J_n)$ vor, so verlangt das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta\Phi = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\Phi}{\partial z_k}\,\delta z_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\,\delta J_2 = 0$$

einfach, daß alle

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_{kn}} = 0 \text{ und außerdem } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\,\delta J_2 = 0$$

sehen, wobei das Annullieren der letzten Summe in der oben beschriebenen Weise zu geschehen hat. Es kommt also nichts wesentlich Neues hinzu, so daß sich weitere Ausführungen wohl erübrigen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Es würde sich eigentlich kaum lohnen, über diese recht trivialen Dinge Worte zu verlieren, wenn nicht bei einigen Änderungen in den Voraussetzungen doch wesentlich neue Gesichtspunkte auftreten würden. Daß bisher alles so einfach vonstatten ging, liegt darin begründet, daß alle Funktionale voneinander unabhängig angenommen wurden. Das ändert sich, wenn einzelnen Gruppen von ihnen dieselben variierbaren Funktionen zugrunde liegen, so daß die Variationen in den einzelnen Gruppen voneinander abhängig werden. Darin greifen gewissermaßen die Sphären der einzelnen Funktionale ineinander über, und wir haben zur Ermittlung der Extreme zuletzt nicht mehr Integralgleichungen und Eulersche Differentialgleichungen nebeneinander zu lösen, sondern Integrodifferentialgleichungen, die den Charakter beider in sich vereinigen. Wir wollen das sogleich in dem einfachsten Fall studieren, daß Φ eine Funktion von nur zwei Funktionalen ist, die ihrerseits von einer einzigen Funktion $y(x)$ abhängen. Daran können wir alles Wesentliche schon sehen. Es sei also wieder bei festen Grenzen wie oben z.B.

$$J_\nu = \int_{x_1}^{x_2} f_\nu(x,y,y')\,dx \qquad (\nu = 1,2)$$

demnach

$$\delta J_\nu = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f_\nu}{\partial y'} \right) \delta y\, dx$$

und schließlich

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial J_1} \delta J_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \delta J_2 .$$

Das für das Eintreten eines Extremums notwendige Verschwinden von $\delta\Phi$ kann nun zunächst trivialerweise, d.h. unabhängig von δJ_1 und δJ_2, dadurch eintreten, daß sowohl

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} = 0 \text{ als auch } \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = 0$$

ist. Diese beiden Gleichungen gestatten, wenn die ihnen genügenden Wertsysteme $J_1^{(e)}, J_2^{(e)}$ für J_1 und J_2 erreichbar sind, unter den schon im Falle unabhängiger J_1, J_2 erörterten Bedingungen die Ermittlung reiner Funktionsextreme. Diese wollen wir als erledigt beiseite lassen und uns nur noch mit der Frage beschäftigen, wann $\delta\Phi$ unter der Voraussetzung verschwindet, daß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial J_2}$$

nicht zugleich Null sind. Ausführlich geschrieben lautet $\delta\Phi$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right)\delta y dx + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right)\delta y dx,$$

wofür wir auch, da die Zahlen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} \text{ und } \frac{\partial\Phi}{\partial J_2},$$

wenn über y(x) verfügt ist, Konstante sind,

$$\delta\Phi = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx$$

schreiben können. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist daher $\delta\Phi$ dann und nur dann gleich Null, wenn y(x) der Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right) = 0 \tag{3}$$

gelingt, in der wir uns natürlich J_1 und J_2 durch die Integrale ersetzt zu denken haben. Bevor wir uns mit Gleichung (3) weiter beschäftigen, wollen wir noch ihre Form anschreiben, wenn J_1 und J_2 in Parameterdarstellung gegeben sind. Es seien also

$$J_\nu = \int\limits_{t_1}^{t_2} F_\nu(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt \qquad (\nu = 1,2)$$

und hierin beide Integranden in $\dot{x}$ und $\dot{y}$ positivhomogen von der Dimension 1. Dann ist bei festen Endpunkten

$$\delta J_\nu = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial F_\nu}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}}\right]\delta x + \left[\frac{\partial F_\nu}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{y}}\right]\delta y\right\} dx \qquad (\nu = 1,2)$$

und hiernach

$$\delta\Phi = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}}\right)\right]\delta y\right\} dt.$$

Nach dem Fundamentallemma folgt also aus $\delta\Phi = 0$ das Bestehen der beiden Integrodifferentialgleichungen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial J_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}}\right) = 0, \tag{4}$$

die aber nicht unabhängig voneinander sind, denn multipliziert man die erste Gleichung in (4) mit $\dot{x}$, die zweite mit $\dot{y}$ und addiert, so erhält man links vom Gleichheitszeichen identisch Null, wie man am einfachsten sieht, wenn man nach dem Vorgang von Weierstraß die Funktionen F_ν^I und T_ν $(\nu = 1,2)$ gemäß folgenden Definitionsgleichungen einführt

$$\frac{\partial^2 F_\nu}{\partial \dot{x}^2} = \dot{y}^2 F_\nu^I, \quad \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} = -\dot{x}\dot{y}F_\nu^I, \quad \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial \dot{y}^2} = \dot{x}^2 F_\nu^I$$

und $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = 1,2)$

$$T_\nu = \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial y \partial \dot{x}} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})F_\nu^I.$$

Bekanntlich ist dann, wie sich nach Durchführung der Differentiationen zeigt,

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}} = \dot{y}T_\nu, \quad \frac{\partial F_\nu}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{y}} = -\dot{x}T_\nu \qquad (\nu = 1,2),$$

woraus die Behauptung über die Abhängigkeit der beiden Gleichungen in (4) sofort folgt. Die Weierstraßsche Notierung gestattet übrigens auch, die Gleichungen (4) in einer einzigen zu vereinigen, nämlich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} T_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} T_2 = 0 \tag{5}$$

(5) ist (4) oft vorzuziehen.

Wir wenden uns nun der Lösung von (3) zu, aus der sofort zu ersehen ist, wie man entsprechend mit (4) oder (5) verfahren hat, so daß wir auf die beiden letzten Gleichungen nicht mehr zurückzukommen brauchen. Trägt man in (3) irgendeine Funktion $y(x)$ ein, gleichgültig ob sie (3) löst oder nicht, so nehmen J_1 und J_2 und damit auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial J_2}$$

ganz bestimmte konstante Werte an. Daraus sieht man sofort, daß (3) als Sonderfall in der allgemeinen, gewöhnlichen Differentialgleichung

$$C_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right) + C_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right) = 0 \tag{3'}$$

enthalten ist, in der C_1 und C_2 zwei beliebige, nicht zugleich verschwindende Konstante bedeuten. Wir ermitteln nun zunächst jenes Integral von (3′), das den Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ genügt. In diesem werden zwar durch diese Bedingungen die beiden Integrationskonstanten gerade festgelegt, doch hängt es unter der Voraussetzung, daß die Faktoren von C_1 und C_2 in (3′) nicht zugleich verschwinden können, die Funktionale J_1 und J_2 also nicht dieselben Extremalen haben, welchen Ausnahmefall wir beiseite lassen wollen, noch von dem willkürlich gebliebenen Verhältnis

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$C_2 : C_1 = \lambda$ ab, hat also die Gestalt $y = y(x; x_1, x_2, y_1, y_2; \lambda)$. Mit diesem y bilden wir nun J_1 und J_2 und daraufhin auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial J_2},$$

welche Werte sich dann ebenfalls als Funktionen von x_1, x_2, y_1, y_2 und λ darbieten.

Die notwendige Spezialisierung von (3′) zu (3) erzwingen wir nun in einfachster Weise, indem wir, wie es sein muß, mit diesen Funktionen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} : \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = \lambda \qquad (3'')$$

setzen. Das ist eine im allgemeinen transzendente Gleichung für die Eigenwerte λ, für die die Ingetrodifferentialgleichung (3) Lösungen besitzt, die wir so mit den Eigenwerten zugleich gewonnen haben. Es ergibt sich das im ersten Augenblick überraschende Resultat, daß die Lösungen von (3) in weitgehendem Maße von der Funktion Φ unabhängig sind, da deren Bauart sich erst in der die Eigenwerte λ festlegenden Gleichung (3″) bemerkbar macht. Handelt es sich also z.B. darum, irgendeine Funktion des Umfangs und des Flächeninhaltes einer geschlossenen Kurve in nicht trivialer Weise, d.h. unter Ausschaltung des reinen Funktionsextrema, zum Extremum zu machen, so ergibt sich unter allen Umständen ein Kreis. Die zum Extremum zu machende Funktion ist nur von Einfluß auf dessen Abmessungen.

Daß das so sein muß, überblicken wir am einfachsten, wenn wir nach dem Grundgebiet G der J_1J_2-Ebene fragen, das für die Funktionale J_1 und J_2 zugänglich ist. Zu seiner Ermittlung denken wir uns die Ebene durch das Geradenbüschel J_2-const. überdeckt und fragen uns, welche Strecke auf jeder Geraden des Büschels dem Gebiet G angehört. Die Antwort darauf gibt uns die Lösung des isoperimetrischen Problems, J_1 bei vorgegebenem J_2 zum Extremum zu machen; denn die hierbei erhaltenen absoluten Extremwerte, das Maximum und das Minimum, legen die Endpunkte der gesuchten Strecke fest, deren Inneres lückenlos durch J_1-Werte bei Vorgabe des J_2-Wertes erreichbar ist, da J_1 nach Voraussetzung ein variierbares Funktional von y(x) ist und sich stetig ändert. Lassen wir nun wieder das vorgegebene Funktional J_2 sich ändern, so überdecken alle so erhaltenen Strecken lückenlos das Gebiet G, so daß dessen Ermittlung restlos durch Lösen des eben formulierten isoperimetrischen Problems geleistet wird. Diese Lösung finden wir bekanntlich durch Integration der zugehörigen Eulerschen Differentialgleichung, die sich mit (3′) identisch erweist. Die Gesamtheit aller isoperimetrischen Konstanten λ bildet also den Wertvorrat, aus dem die Eigenwerte von (3) zu entnehmen sind, und die mit ihrer Hilfe konstruierten Funktionen

$$J_\nu = \int_{x_1}^{x_2} f_\nu(x, y, y')\,dx = J_\nu(x_1, x_2, y_1, y_2; \lambda) \qquad (\nu = 1, 2)$$

stellen, wenn wir λ als variablen Parameter betrachten, gerade die Berandung des Grundgebiets G dar. Über diesem Gebiet denken wir uns wieder $\Phi(J_1, J_2)$ als dritte

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

rechtwinklige Koordinate aufgetragen, d.h. also die Fläche $\Phi(J_1,J_2)$ konstruiert und durch kotierte Isohypsen auf die J_1J_2-Ebene abgebildet. Reine Funktionsextrema, die durch

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}=0 \text{ und } \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}=0$$

gekennzeichnet sind, liegen im allgemeinen nur im Inneren von G, können aber natürlich unter Umständen auch auf den Rand zu liegen kommen. Reine Funktionalextrema, für die

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} \text{ und } \frac{\partial\Phi}{\partial J_2}$$

nicht zugleich Null sind, müssen aber auf dem Rande liegen, da für jede Extremstelle im Innern von G notwendig

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}=0$$

sein muß. Allen Punkten des Randes von G entsprechen in der xy-Ebene die Extremalen des zugehörigen isoperimetrischen Problems. Damit ist der Grund für das am Ende des vorigen Abschnitts als überraschend bezeichnete Ergebnis klar zutage gelegt worden. Längs des Randes von G ist nun Φ eine Funktion von λ und daher für das Eintreten eines Randextremums notwendig, daß

$$\frac{d\Phi}{d\lambda}=\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}\frac{dJ_1}{d\lambda}+\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\frac{dJ_2}{d\lambda}=0$$

ist, wodurch, da beim Fortschreiten längs einer Isohypse

$$\frac{\partial\Phi}{\varphi J_1}dJ_1+\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}dJ_2=0$$

ist, zum Ausdruck gebracht wird, daß reguläre Punkte vorausgesetzt, in einer Randextremstelle die Berandung von G durch die zugehörige Isohypse berührt wird. Die zuletzt angeschriebene Gleichung muß nun offenbar dieselben Eigenwerte liefern wie (3″). Also muß zunächst für die Eigenwerte, wie sich durch Elimination von

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} \text{ und } \frac{\partial\Phi}{\partial J_2} \text{ ergibt,}$$

$$\frac{dJ_1}{d\lambda}+\lambda\frac{dJ_2}{d\lambda}=0 \text{ oder } \frac{dJ_1}{dJ_2}=-\lambda \tag{3'''}$$

sein. Ändern wir nunmehr die Funktion $\Phi(J_1,J_2)$ in beliebiger Weise ab, so ändern wir auch die Eigenwerte, doch bleibt (3‴) immer bestehen. Es folgt daraus, daß Gleichung (3‴) bei beliebigem λ gelten muß, eine interessante Feststellung, die zu Kontrollzwecken mit Nutzen herangezogen werden kann.

Die hinreichenden Bedingungen für das Eintreten eines Randextrems sind hier natürlich dieselben wie früher: In einer Randextremstelle muß die zugehörige Isohpyse

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

den Rand von G von außen berühren, und aus der Kotierung ist zu ersehen, ob es sich um ein Randmaximum oder -minimum handelt.

Nicht unerwähnt bleibe, daß neben der durch das zugehörige isoperimetrische Problem gegebenen Berandung von G weitere Randkurven hinzukommen können, wie etwa die Geraden $J_1 = J_1^{(g)}$ und $J_2 = J_2^{(g)}$. Diese sind dann gesondert nach Randextremstellen abzusuchen, wie auch auf Extremstellen in den dann entstehenden Ecken der Berandung zu achten ist, in denen die Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen in Frage gestellt ist. Hat man so die Verhältnisse in der J_1J_2-Ebene genau untersucht, so ist natürlich wieder in die xy-Ebene zurückzugehen und zu fragen, wie sich dort die in der J_1J_2-Ebene gewonnenen Erkenntnisse auswirken.

Zur Erläuterung wollen wir nun auf einige Beispiele zu sprechen kommen. Wir setzen, um nicht durch weitläufige Rechnungen zu ermüden, in Beispiel II möglichst einach, $x_2 > x_2$ voraussetzend,

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx \qquad J_2 = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

mit der Festsetzung $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Zur Abgrenzung von G lösen wir zunächst das isoperimetrische Problem $\delta(J_1 + \lambda J_2) = 0$. Die zugehörige, mit (3′) identische Eulersche Differentialgleichung lautet

$$y'' = \frac{\lambda}{2}.$$

Das zugehörige, den Randbedingungen genügende Integral ist

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{\lambda}{4}(x_2 - x_1)\right](x - x_1) + \frac{\lambda}{4}(x - x_1)^2.$$

Die Extremalen sind also in der xy-Ebene leicht zu kennzeichnende Parabeln, die sich für $\lambda > 0$ in der $+y$-Richtung, für $\lambda < 0$ in der $-y$-Richtung öffnen und für $\lambda = 0$ in die Gerade P_1P_2 degenerieren. Der jeweilige λ-Wert ergibt sich, da $J_2 = K$ vorgegeben ist, aus der Gleichung

$$\int_{x_2}^{x_1} y dx = K \text{ eindeutig zu } \lambda = \frac{24}{(x_2 - x_1)^3}\left[\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2 - K\right].$$

Hieraus wird das oben beschriebene Verhalten der Extremalen im Zusammenhang mit dem Vorzeichen von λ erkennbar, da ja

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)$$

der Inhalt des Trapezes ist, das von der Strecke P_1P_2, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Zunächst klären wir ganz im Sinne der klassischen Variationsrechnung die Frage, ob und wann bei dem isoperimetrischen Problem ein Extremum vorliegt, und welcher Art es ist. Da, wenn $y'^2+\lambda y=h(x,y,y')$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y'^2}=2>0$$

ist und demnach die Weierstraßsche Funktion $\epsilon=(y'-\bar{y}')^2\geq 0$, so liegt gewiß ein starkes Minimum von J_1 bei gegebenem J_2 vor, und zwar ein absolutes, solange der Extremalenbogen P_1P_2 nicht zu den J_1 konjugierten Punkt anschließt. Es bleibt also nur noch die Frage der konjugierten Punkte zu klären. Wir betrachten dazu das Extremalenbündel durch P_1 mit der Gleichung

$$y=y_1+c(x-x_1)+\frac{\lambda}{4}(x-x_1)^2$$

mit c und λ als Parameter und berechnen dazu das Integral J_2 mit variabler oberer Grenze x, das wir mit z bezeichnen wollen:

$$z=\int_{x_1}^{x_2}\left[y_1+c(x-x_1)+\frac{\lambda}{4}(x-x_1)^2\right]dx=y_1(x-x_1)+\frac{c}{2}(x-x_1)^2+\frac{\lambda}{12}(x-x_1)^3.$$

Die Funktionaldeterminante

$$\Delta=\frac{\partial(y,z)}{\partial(c,\lambda)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial \lambda}\\ \frac{\partial z}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial \lambda}\end{vmatrix}$$

hat den Wert

$$\Delta=-\frac{1}{24}(x-x_1)^4,$$

verschwindet also nur für $x=x_1$. Es existiert also kein zu P_1 konjugierter Punkt. Die von P_1 ausstrahlenden Extremalen liefern also das absolute starke Minimum ohne Einschränkung bei beliebigem x_2-x_1.

Nach der Klärung der Sachlage in der xy-Ebene gehen wir jetzt zur J_1J_2-Ebene über. Bei vorgegebenem $J_2=K$ erhalten wir den zugehörigen Mindestwert $J_1^{\text{min.}}$ von J_1, indem wir den oben für diesen Fall angegebenen λ-Wert in y eintragen und damit J_1 berechnen. Offenbar ist $J_1^{\text{min.}}\leq J_1<+\infty$, da J_1 bei gegebenem K beliebig große Werte annehmen kann. Wir denken uns jetzt diese Rechnung bei veränderlichem $J_2=K$ wiederholt. Die so ermittelten Halbgeraden $J_1\geq J_1^{\text{min.}}$ des Büschels $J_2=\text{const.}$ überdecken genau das gesuchte Grundgebiet G, und der geometrische Ort der Grenzpunkte der Halbgeraden wird offensichtlich erhalten, indem λ aus den beiden für J_1 und J_2 erhaltenen Werten eliminiert wird. Mit anderen Worten: $J_1=J_1(\lambda)$ und $J_2=J_2(\lambda)$ ist mit λ als Kurvenparameter die Gleichung der Randkurve von G. Die einfache Rechnung ergibt zunächst

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$J_2 = (x_2-x_1)\left[\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{\lambda}{24}(x_2-x_1)^2\right]$$

und, da

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx = yy' \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} yy'' dx = yy' \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{\lambda}{2} J_2$$

ist,

$$J_1 = \frac{(y_2-y_1)^2}{x_2-x_1} + \frac{\lambda^2}{48}(x_1-x_1)^3,$$

wobei wir uns sogleich überzeugen, daß Gleichung (3‴) erfüllt ist. Die Grenze von G ist, wie wir sehen, eine Parabel, deren Gleichung in parameterfreier Darstellung

$$\left[J_2 - \frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2}\right]^2 = \frac{(x_2-x_1)^3}{12}\left[J_1 - \frac{(y_2-y_1)^2}{x_2-x_1}\right]$$

lautet. Da J_1 auf dieser Kurve bei gegebenem J_2 Minima annimmt, so ist G das Innere dieser Kurve. Wir bemerken noch, daß auf dem oberen Ast der Parabel

$$\left(J_2 \geq \frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2}\right) \qquad \lambda \leq 0,$$

auf dem unteren

$$\left(J_2 < \frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2}\right) \qquad \lambda > 0$$

ist und dementsprechend der obere Ast die Bildpunkte J_1, J_2 enthält, auf unter sich öffnender Extremalen in der xy-Ebene zugehören, während die zu den Punkten des unteren Astes gehörenden Extremalen nach oben geöffnet sind. Dem Scheitel

$$J_1 = \frac{(y_2-y_1)^2}{x_2-x_1}, \quad J_2 = \frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2}$$

entspricht, da $\lambda = 0$, die geradlinige Verbindung von P_1 und P_2.

Nachdem so die notwendigen Grundlagen gewonnen sind, können wir endlich an die Lösung der Aufgabe schreiten, irgendeine Funktion $\Phi(J_1,J_2)$ auf Extremwerte zu untersuchen. Wertsysteme J_1,J_2 mit Bildpunkten innerhalb G, für die

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial J_2} = 0 \text{ und außerdem } \frac{\partial^2\Phi}{\partial J_1^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial J_2^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial J_1 \partial J_2}\right)^2 > 0$$

ist, liefern die reinen Funktionsextreme. Die Funktionalextreme hingegen liegen auf dem Rande von G, und zwar in solchen Punkten, in denen die Grenzparabel von G von einer Isohypse $\Phi(J_1J_2) = \text{const.}$ die über G konstruierten Fläche $\Phi(J_1,J_2)$ von außen berührt wird. Handelt es sich z.B. darum,

$$\Phi(J_1,J_2) = \frac{J_1}{J_2}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

zum Extremum zu machen, in welchem Falle die Φ-Fläche ein hyperbolisches Paraboloid ist, so fallen, da

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} = \frac{J_1}{J_2} \text{ und } \frac{\partial\Phi}{\partial J_2} = -\frac{J_1}{J_2^2}$$

ist, die Funktionsextreme fort, und für die Eigenwerte λ der Funktionalextreme ergibt sich gemäß (3″) die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - 24\lambda\,\frac{y_1+y_2}{(x_2-x_1)^2} - 48\,\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^4} = 0.$$

Die Diskriminante ist

$$D = -\frac{192}{(x_2-x_1)^4}\,[(y_2-y_1)^2 + 3\,(y_2+y_1)^2],$$

und diese ist nur dann gleich Null, wenn $y_1 = y_2 = 0$ ist, sonst aber immer negativ. Für $D < 0$ hat die Gleichung für λ zwei reelle, getrennte Wurzeln λ_1 und λ_2, die wegen

$$\lambda_1\lambda_2 = -48\,\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^4}$$

verschiedenes Vorzeichen haben und explizit so lauten

$$\lambda_{1,2} = \frac{12}{(x_2-x_1)^2}\left[y_1+y_2 \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}\,(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)}\right].$$

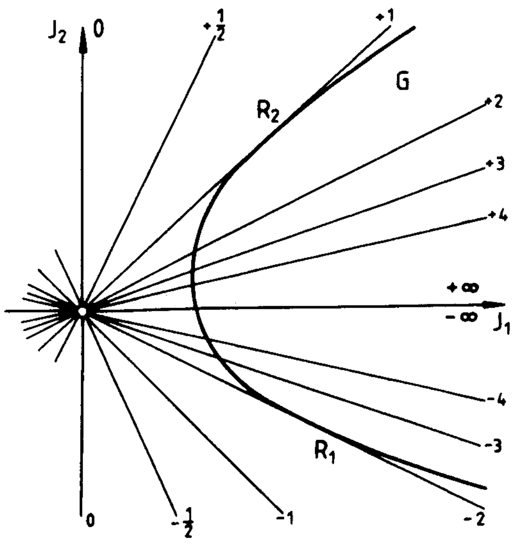

Bild 2:
Isohypsen der Fläche $\Phi(J_1, J_2)$ sind die Geraden durch den Anfangspunkt 0.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Für λ_1 gelte das positive, für λ_2 das negative Vorzeichen der Quadratwurzel, und es sei demnach $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$. Die zugehörigen Punkte R_1 und R_2 auf der Randparabel von G liegen also auf dem unteren bzw. oberen Ast und sind als Bildpunkte von Extremalen in der xy-Ebene, die sich nach oben bzw. unten öffnen. Die Isohypsen der Fläche

$$\Phi(J_1, J_2) = \frac{J_1}{J_2}$$

sind die Geraden duch 0.

Aus diesem Büschel berühren, wenn nicht zugleich $y_1 = y_2 = 0$ ist, zwei Geraden der Randparabel in R_1 und R_2, und zwar ganz außerhalb von G verlaufend (siehe Bild 2), so daß in R_1 und R_2 bestimmt Extreme vorliegen. Aus der Kotierung sehen wir, daß Φ in R_1 ein relatives Maximum, in R_2 ein relatives Minimum annimmt, die zu absoluten Extremen werden, wenn hinsichtlich des Maximums in R_1 nur Wertepaare J_1J_2 zugelassen werden, in denen $J_2 < 0$, hinsichtlich des Minimums, in R_2 hingegen nur Wertepaare, in denen $J_2 > 0$ ist. Im Falle $y_1 = y_2 = 0$ fällt der Scheitel der Randparabel mit 0 zusammen, und die zusammenrückenden Tangenten $0R_1$ und $0R_2$ werden zur Scheiteltangente. Dann kann offenbar kein Extremum zustandekommen, ganz abgesehen davon, daß für $J_1 = J_2 = 0$, Φ die sinnlose Form

$$\frac{0}{0} \text{ annimmt.}$$

In der xy-Ebene wirkt sich das alles so aus:

Im Falle $y_1^2 + y_2^2 > 0$ liefert die Parabel

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{\lambda_1}{4}(x_2 - x_1)\right](x - x_1) + \frac{\lambda_1}{4}(x - x_1)^2$$

für $\dfrac{J_1}{J_2}$

ein relatives Maximum, das zu einem absoluten wird, wenn die Vergleichskurven der Bedingung

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} y dx < 0$$

unterworfen werden; hingegen liefert die Parabel

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{\lambda_2}{4}(x_2 - x_1)\right](x - x_1) + \frac{\lambda_2}{4}(x - x_1)^2$$

für $\dfrac{J_1}{J_2}$

ein relatives Minimum, das zu einem absoluten wird, wenn die Vergleichskurven der Beschränkung

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} y dx > 0$$

unterliegen. Ist $y_1 = y_2 > 0$, so ist $\lambda_2 = 0$, und das Minimum wird dann von der horizontalen Geraden $y = y_1 = y_2$ geliefert; ist hingegen $y_1 = y_2 < 0$, so verschwindet λ_1, und die Gerade $y = y_1 = y_2$ liefert jetzt das Maximum. In beiden Sonderfällen liefert die Gerade das Extremum Null, und es ist dann auch ohne weiteres einleuchtend, und zwar durchaus elementar, wie diese Extrema zustande kommen. Ist aber $y_1 = y_2 = 0$, so gibt es kein Extremum. Damit ist die gestellte Aufgabe restlos gelöst.

Um zu zeigen, wie man im Falle nicht-geradliniger Isohypsen der Φ-Fläche zweckmäßig verfahren kann, betrachten wir noch den Fall als Gegenstück, daß $\Phi(J_1,J_2) = J_1.J_2$ zum Extremum gemacht werden soll. Die Fläche Φ wird dann auch wieder durch ein hyperbolisches Paraboloid dargestellt, jedoch mit anderer Achsenorientierung. Die Isohypsen sind jetzt gleichseitige Hyperbeln (siehe Bild 3).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} = J_2 \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = J_1$$

verschwinden nur im Punkte 0 ($J_1 = J_2 = 0$) und dieser gehört G nur an, und zwar als Randpunkt, wenn $y_1 = y_2 = 0$ ist. Dann verläuft aber ein Zweig der Isohypse 0 durch O, nämlich die J_1-Achse, in G, so daß in O kein Extremum auftritt und daher auch in diesem Fall Funktionsextreme nicht in Frage kommen. Was die Funktionalextreme betrifft, so finden wir hier gemäß (3″) für die Eigenwerte λ die Gleichung

$$J_1 - \lambda J_2 = 0$$

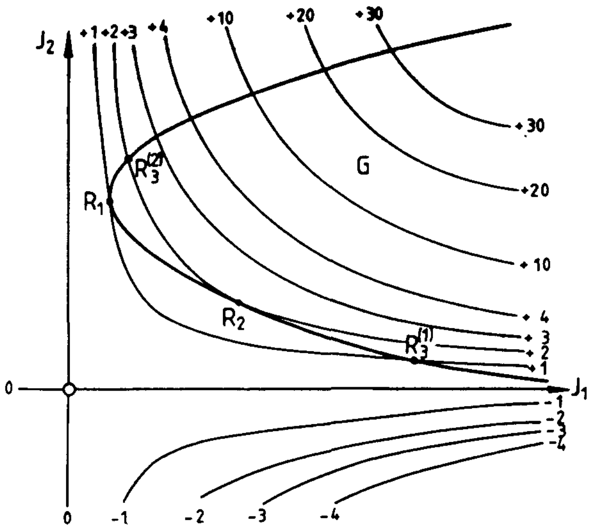

Bild 3:
Die Isohypsen sind gleichseitige Hyperbeln.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

oder nach Eintragen von $J_1(\lambda)$ und $J_2(\lambda)$

$$\lambda^2 - 8\lambda \frac{y_1+y_2}{(x_2-x_1)^2} + 16 \frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^4} = 0.$$

Die Diskriminante ist

$$D = -\frac{256 y_1 y_2}{(x_2-x_1)^4},$$

woraus zu ersehen ist, daß $\Phi = J_1 J_2$ nur dann Extremwerte aufweisen kann, wenn y_1 und y_2 dasselbe Vorzeichen haben; denn für $y_1 y_2 < 0$ ist $D > 0$, und die Eigenwerte sind komplex. Ist von y_1 und y_2 eine Größe oder sind auch beide Null, so fallen die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 zusammen. Wegen

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{16(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^4}$$

haben λ_1 und λ_2, wenn reell, immer gleiches Vorzeichen und sind wegen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 8 \frac{y_1+y_2}{(x_2-x_1)^2}$$

beide positiv, wenn $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$, hingegen beide negativ, wenn $y_1 < 0$ und $y_2 < 0$. Im ersten Fall finden wir also mögliche Extremstellen auf dem unteren Zweig der Randparabel von G (siehe Bild 3, Punkt R_1 und R_2), im zweiten Fall auf dem oberen Zweig. Explizit lauten die Eigenwerte

$$\lambda_\nu = \frac{4}{(x_2-x_1)^2} (y_1+y_2 \pm 2\sqrt{y_1 y_2}) = \frac{4}{(x_2-x_1)^2} (\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^2 \qquad (\nu=1,2)$$

wobei hier wie im folgenden für $\nu = 1$ immer das obere, für $\nu = 2$ das untere Vorzeichen der Quadratwurzel gelten soll. Diesen Eigenwerten sind nun mit entsprechend übereinstimmendem Index die Randpunkte R_1 und R_2 zugeordnet, denen aufgrund der Ausdrücke für $J_1(\lambda)$ und $J_2(\lambda)$ die folgenden Koordinaten zugehören

$$\left[\begin{aligned} J_1^{(e,\nu)} &= \frac{4}{3(x_2-x_1)} [y_1^2+y_2^2 \pm (y_1+y_2)\sqrt{y_1 y_2}] = \frac{4}{3(x_2-x_1)} \left[\frac{\sqrt{y_1^5} \pm \sqrt{y_2^5}}{\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2}} - y_1 y_2\right] \\ J_2^{(e,\nu)} &= \frac{x_2-x_1}{3} [y_1+y_2 \pm \sqrt{y_1 y_2}] = \frac{x_2-x_1}{3} \frac{\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3}}{\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2}}. \qquad (\nu=1,2) \end{aligned}\right]$$

Die beiden durch R_1 und R_2 hindurchgehenden Hyperbeln haben daher die Gleichungen

$$J_1 J_2 = J_1^{(e,\nu)} J_2^{(e,\nu)} = \frac{4}{9} (\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})^2.$$

Um sie zu untersuchen, ob sie in den unmittelbaren Umgebungen von R_1 und R_2 innerhalb oder außerhalb der Grenzparabel von G verlaufen, setzen wir $J_2 = J_2^{(e,\nu)} + h_\nu$ und finden längs der Hyperbeln

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$J_1 = \frac{4}{9}\,\frac{(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})^2}{J_2^{(e,v)} + h_v} = \frac{4\,(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})}{3(x_2-x_1)}\;\frac{1}{1 + \dfrac{3h_v\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})}{(x_2-x_1)\,(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})}}$$

$$= \frac{4\,(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})}{3(x_2-x_1)} - \frac{4}{(x_2-x_1)^2}\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^2 h_v +$$

$$\frac{12}{(x_2-x_1)^3}\,\frac{(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^3}{(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})}\,h_v^2 - + \ldots = J_1^{Hyp}.$$

Längs der Grenzparabel hingegen ist

$$J_1 = \frac{4}{3(x_2-x_1)}\,(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2}) - \frac{4}{(x_2-x_1)^2}\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^2 h_v +$$

$$\frac{12}{(x_2-x_1)^3}\,h_v^2 = J_1^{Par}.$$

Daher gilt

$$J_1^{Par} - J_1^{Hyp} = \frac{12\,h_v^2}{(x_2-x_1)^3}\left[1 - \frac{(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^3}{(\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3})}\right] + - \ldots =$$

$$\frac{36\,h_v^2}{(x_2-x_1)^2}\,\frac{\sqrt{y_1y_2}\,(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})}{\sqrt{y_1^3} \pm \sqrt{y_2^3}} + - \ldots = \frac{36\sqrt{y_1y_2}\,h_v^2}{(x_2-x_1)^3\,[\pm(y_1+y_2) + \sqrt{y_1y_2}]} + - \ldots$$

Hieraus ist zunächst zu ersehen, daß die Isohypsen die Randparabel zu den Punkten R_1 und R_2 tatsächlich berühren, da die Reihe $J_1^{Par} - J_2^{Hyp}$ mit der zweiten Potenz von h_v beginnt. Damit die Berührung von außen erfolge, muß in einer gewissen Umgebung von $h_v = 0$, $J_1^{Par} - J_1^{Hyp} > 0$ sein. Das ist aber, wie aus dem Faktor von h_v^2 in der letzten Reihe hervorgeht, für $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ der Fall, wenn das obere Vorzeichen gilt, also für λ_1, aber nicht für λ_2. Wir haben also dann in dem zum Eigenwert λ_1 gehörigen Randpunkt R_1 ein Extremum, nur zum Eigenwert λ_2 gehörigen Randpunkt R_2 aber nicht (siehe Bild 3, wo die Randparabel für den Fall $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ eingezeichnet ist und die Isohypse mit der Kotierung 1 die Randparabel im Punkt R_1, die Isohypse mit der Kotierung 2 die Parabel im Punkt R_2 berührt, die erste von außen, die zweite von innen). In R_1 hat $\Phi = J_1J_2$, wie aus der Kotierung ersichtlich ist, ein relatives Minimum. Ist $y_1 < 0$ und $y_2 < 0$, so schließen wir entsprechend, daß zum Eigenwert λ_1 kein Extremum gehört, wohl aber zum Eigenwert λ_2, und zwar ein relatives Maximum. Das relative Minimum in R_1 im Falle $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ wird zu einem absoluten in dem echten, R_1 als Randpunkt enthaltenden Teilbereich von G, der durch Ausscheiden des unterhalb der Isohypse durch R_1 gelegenen Teiles aus G entsteht, und der längs dieser Isohypse offen ist. Er ist durch die Ungleichung $J_1J_2 \geq J_1^{(e,1)}J_2^{(e,1)}$ gekennzeichnet, wobei das Gleichheitszeichen nur im Punkte R_1 gilt. Entsprechendes ist hinsichtlich des relativen Maximums im Falle $y_1 < 0$, $y_2 < 0$ zu sagen. Bequemer, wenn auch unschärfer, ist es, die Teilbereiche von G statt durch die Isohypsen der Extrempunkte durch die Geraden J_2-const. durch die Randpunkte $R_3^{(v)}$ abzuschließen, in denen die durch die Extrempunkte gehenden, die Parabel berührenden Isohypsen diese Kurve noch einmal

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

treffen. Die vierten Schnittpunkte R_4 sind für alle Isohypsen dieselben, da Parabel und Isohypsenbüschel einen unendlich fernen Punkt gemeinsam haben, liegen daher im Unendlichen und kommen nicht in Betracht. Wir bestimmen die Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte $R_3^{(\nu)}$ – zu jedem Wort von $\lambda_{1,2}$ gehört ja ein anderer – am besten so, daß wir aus den zuletzt mit h_ν als Variabler angeschriebenen Gleichungen von Hyperbeln und Parabel J_1 eliminieren. Da die Punkte R_4 ins Unendliche fallen, so ergeben sich für die Zuwächse h_ν nur Kubische Gleichungen, die überdies die Doppelwurzel $h_\nu=0$ aufweisen, so daß nur noch lineare Gleichungen zu lösen bleiben. Die einfache Rechnung ergibt für $R_3^{(\nu)}$ die Koordinaten

$$\left[\begin{aligned} J_1^{(3,\nu)} &= \frac{4}{3(x_2-x_1)}\left(y_1 \pm \sqrt{y_1y_2}+y_2\right)^2 = \frac{4}{3(x_2-x_1)}\left(\frac{\sqrt{y_1^3}\pm\sqrt{y_2^3}}{\sqrt{y_1}\pm\sqrt{y_2}}\right)^2 \\ J_2^{(3,\nu)} &= \frac{x_2-x_1}{3}\left(y_1 \pm 2\sqrt{y_1y_2}+y_2\right) = \frac{x_2-x_1}{3}\,\sqrt{y_1}\pm\sqrt{y_2})^2. \end{aligned}\right] \qquad (\nu=1,2)$$

Ist $y_1=y_2$, so ist offensichtlich für beide Werte von ν, $J_2^{(3,\nu)}=0$, und zwar ist dies, wenn $y_1=y_2>0$, demnach $\nu=1$ ist und die oberen Vorzeichen gelten, das Minimum aller überhaupt möglichen Werte $J_2^{(3,1)}$, wenn $y_1=y_2<0$ und daher $\nu=2$, bei Berücksichtigung der unteren Vorzeichen das Maximum aller Werte von $J_2^{(3,2)}$. In diesem Falle liegen also die Punkte R_3 auf der J_1-Achse. Die Randparabel von G berührt dann auch die J_2-Achse und ihren Scheitel in $R_1^{(\nu=1)}$ bzw. $R_2^{(\nu=2)}$ und die berührende Isohypse durch diese Punkte mit der Kotierung Null zerfällt in das Geradenpaar $J_1J_2=0$.

Es fragt sich noch, was geschieht, wenn die Diskriminante der quadratischen, die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ festlegenden Gleichung verschwindet, was für $y_1=y_2\neq 0$, für $y_1\neq 0$, $y_2=0$ und auch für $y_1=y_2=0$ eintritt. Im Falle $y_1=y_2=0$ lautet die Gleichung der Randparabel

$$J_2^2=\frac{(x_2-x_1)^3}{12}\,J_1,$$

und die Punkte R_1 und R_2 fallen beide in 0 zusammen, wo dann, wie wir schon sahen, auch

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}=0$$

wird, aber trotzdem kein Extremum eintritt. Dieser Fall ist schon früher erledigt worden. Ist nur eine der beiden Koordinaten y_1, y_2 gleich Null, so kommt in der Differenz $J_1^{Par}-J_1^{Hyp}$ auch die Potenz h_ν^2 in der Reihe in Fortfall, so daß mit $C_3\neq 0$, $J_1^{Par}-J_1^{Hyp}=C_3h_\nu^3+\ldots$ wird. Je nach dem Vorzeichen von h_ν ist diese Differenz in der Umgebung des Berührungspunktes also positiv oder negativ, die berührende in diesem Fall sogar oskulierende Hyperbel wechselt also vom Äußeren in das Innere der Parabel. Die kubische Gleichung für h_ν hat ja auch in diesem Falle die dreifache Wurzel $h_\nu=0$ und $R_3^{(1)}$ rückt demnach in Bild 3 nach R_1, woraus das Hinüberwechseln der Hyperbel vom Äußeren in das Innere der Parabel auch anschaulich klar wird. Es folgt daraus das

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

merkwürdige und gewiß nicht vorauszusehende Ergebnis, daß auch kein Extremum eintreten kann, sobald nur eine der Koordinaten $y_1 y_2$ Null ist. Damit ist die Diskussion in der J_1J_2-Ebene beendet. Zur xy-Ebene übergehend, stellen wir abschließend fest:

Ist $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$, so liefert die Parabel

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{\lambda_1}{4}(x_2 - x_1)\right](x - x_1) + \frac{\lambda_1}{4}(x - x_1)^2$$

für $\Phi = J_1 J_2$ ein relatives Minimum, das in ein absolutes übergeht, wenn die Vergleichskurven der Bedingung

$$J_1 J_2 > \frac{4}{9}\left(\sqrt{y_1^3} - \sqrt{y_2^3}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(y_1^3 + y_2^3 - 2 y_1 y_2 \sqrt{y_1 y_2}\right)$$

unterworfen werden, oder einfacher, aber im allgemeinen etwas einschränkender als nötig,

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx > \frac{x_2 - x_1}{2}\left(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right)^2 = \frac{x_2 - x_1}{3}\left(y_1 + y_2 - 2\sqrt{y_1 y_2}\right).$$

Ist $y_1 < 0$ und $y_2 < 0$, so liefert die Parabel

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{\lambda_2}{4}(x_2 - x_1)\right](x - x_1) + \frac{\lambda_2}{4}(x - x_1)^2$$

für $\Phi = J_1 J_2$ ein relatives Maximum, das in ein absolutes übergeht, wenn die Vergleichskurven der Bedingung

$$J_1 J_2 < \frac{4}{9}\left(\sqrt{y_1^3} + \sqrt{y_2^3}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(y_1^3 + y_2^3 + 2 y_1 y_2 \sqrt{y_1 y_2}\right)$$

unterworfen werden, oder einfacher, aber im allgemeinen etwas einschränkender als nötig,

$$J_2 < \frac{x_2 - x_1}{3}\left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}\right)^2 = \frac{x_2 - x_1}{3}\left(y_1 + y_2 + 2\sqrt{y_1 y_2}\right).$$

Andere Extreme kommen nicht zustande, also überhaupt keine, wenn y_1 und y_2 verschiedenes Vorzeichen haben oder auch nur eine dieser Größen Null ist. Für $y_1 = y_2 > 0$ ist $\lambda_1 = 0$, für $y_1 = y_2 < 0$ ist $\lambda_2 = 0$. In beiden Fällen degenerieren die Parabeln in Gerade parallel zur x-Achse, und das Zustandekommen der Extreme durch Erreichen der Werte Null kann dann auch ohne Rechnung durch einfache Überlegung eingesehen werden. Übrigens fallen dann auch die beiden Bedingungen für das Zustandekommen der absoluten Extreme, die genaue und die vereinfachte Unschärfe, zusammen. Sie lauten einfach im Falle des Minimums

$$(y_1 = y_2 > 0) : J_2 = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx < 0,$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

im Falle des Maximums

$$(y_1 = y_2 < 0) : J_2 = \int_{x_1}^{x_2} y dx < 0.$$

Damit ist wohl bei dem behandelten Beispiel alles mit wünschenswerter Gründlichkeit aufgeklärt.

Leider sind die Rechnungen bei nur wenig verwickelteren Problemen ungleich unübersichtlicher. Es wird daher nicht überflüssig sein, wenn wir noch ein weiteres Beispiel III einfachster Art betrachten, bei dem wir ohne umständliche Rechnungen auskommen, und bei dem doch noch der eine oder andere neue Gesichtspunkt in Erscheinung tritt. Bei diesem Beispiel stellen wir uns die Aufgabe, eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve so zu bestimmen, daß ihr Umfang J_1 eine vorgegebene positive Maßzahl C_1 und ihr Inhalt J_2 eine andere gegebene positive Maßzahl C_2 im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut approximieren sollen, so daß also

$$\Phi(J_1,J_2) = (J_1-C_1)^2 + (J_2-C_2)^2$$

ein Minimum werde. Hier wählen wir für J_1 und J_2 die Parameterdarstellung und bemerken, daß in δJ_1 und δJ_2 die bei der bekannten partiellen Integration aus dem Integralzeichen heraustretenden Glieder wegen der Geschlossenheit der Kurven genau so verschwinden wie beim Vorliegen fester Endpunkte sich nicht schließender Kurvenbögen. Umfang und Inhalt nehmen wir immer als positiv an, indem wir, ohne die Allgemeinheit dadurch einzuschränken, nur im positiven Sinne durchlaufene Kurven, zur Konkurrenz zulassen. Es ist dann also

$$J_1 = \int_L \sqrt{\dot{x}_2+\dot{y}^2}\,dt, \quad J_2 = \frac{1}{2}\int_L (x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$$

und hiernach in unseren Formeln

$$F_1(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, F_2(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x}).$$

Wegen

$$F_1^I = (\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{3}{2} \text{ und } F_2^I = 0$$

ist $$T_1 = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial \dot{x}} + (\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})F_1^I = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

und $$T_2 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^1 F_2}{\partial y \partial \dot{x}} + (\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})F_2^I = 1.$$

Die Integraldifferentialgleichung (5), die wir jetzt heranziehen, nimmt also, da

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_1} = 2(J_1 - C_1) \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = 2(J_2 - C_2) \text{ ist,}$$

die Gestalt

$$[\int_L \sqrt{\dot{x}_2 + \dot{y}^2}\, dt - C_1] \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} + [\frac{1}{2} \int_L (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt - C_2] = 0$$

an. Ihre Lösung ist in der Differentialgleichung

$$\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} + \lambda = 0$$

enthalten, deren Integralkurven die ∞^3 im positiven Sinne durchlaufenen Kreise der Ebene mit dem Radius

$$-\frac{1}{\lambda} \text{ sind.}$$

Es ist hiernach bekanntlich

$$J_1(\lambda) = -\frac{2\pi}{\lambda}, \quad J_2(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda^2},$$

und wir bestätigen sogleich wieder, daß Gleichung (3‴) erfüllt ist; denn es ist in der Tat

$$\frac{dJ_1}{dJ_2} = -\lambda.$$

Für die Eigenwerte λ erhalten wir gemäß (3″)

$$\frac{\pi}{\lambda^2} - C_2 = -\lambda\left(\frac{2\pi}{\lambda} + C_1\right)$$

oder $\quad \omega(\lambda) = C_1\lambda^3 + (2\pi - C_2)\lambda^2 + \pi = 0,$

also diesmal eine kubische Gleichung. Da mathematische Voraussetzung $C_1 > 0$ ist, so ist $\omega(-\infty) = -\infty$, während $\omega(0) = \pi > 0$ ist; $\omega(\lambda) = 0$ hat also eine oder drei negative Wurzeln. Die Annahme dreier negativer Wurzeln muß indessen fallen gelassen werden, da wegen des Fehlens der ersten Potenz von λ, $\omega(\lambda)$ die Summe der reziproken Werte der Wurzeln Null sein muß, was nicht möglich ist, wenn drei reelle Wurzeln gleichen Vorzeichens vorhanden sind. Da für uns sowieso nur negative Werte von λ in Frage kommen, so folgt, daß $\omega(\lambda) = 0$ nur einen einzigen brauchbaren Eigenwert λ liefert.

Nun zur Frage nach dem Grundgebiet G! – Es ist wegen der natürlichen Annahme $J_1 \geq 0$ und $J_2 \geq 0$ von vornherein auf den ersten Quadranten der J_1J_2-Ebene beschränkt, ähnlich wie in Beispiel II nur die Halbebene $J_1 \geq 0$ für das dortige Grundgebiet in Frage kam. Während aber in Beispiel II diese Beschränkung auf das dortige Grundgebiet ohne Einfluß war, ist das jetzt bei Beispiel III wesentlich anders. Hier ist G wegen der bekannten isoperimetrischen Eigenschaft des Vollkreises gemäß den Gleichungen

$$J_1 = -\frac{2\pi}{\lambda}, \quad J_2 = \frac{\pi}{\lambda^2},$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

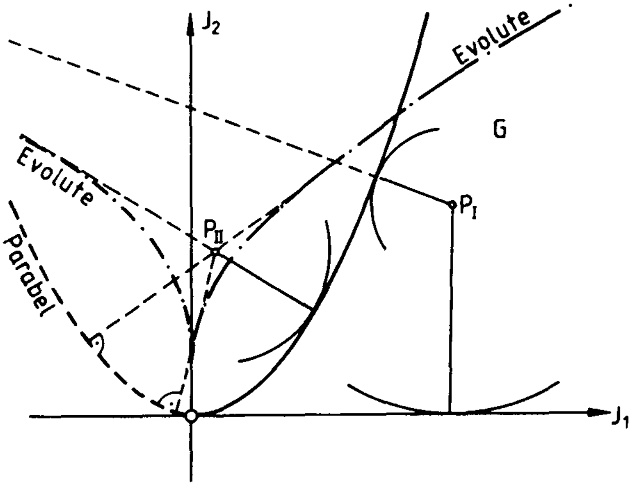

Bild 4:
Der Bereich G nach oben durch eine Parabel abgeschlossen. Die Isohypsen der Fläche Φ sind konzentrische Kreise.

die zusammen die Parametergleichung der Grenzkurve darstellen, nach oben durch die Parabel

$$J_2 = \frac{1}{4\pi} J_1^2$$

abgeschlossen, deren Zweig $J_1 \geq 0$ zusammen mit der Halbgeraden $J_1 \geq 0$ der J_1-Achse den nach dem Unendlichen hin offenen Bereich G begrenzt (siehe Bild 4). Der Bereich G hat in 0 offenbar eine Spitze, auf die besonders zu achten ist. Die über G konstruierte Fläche $\Phi = (J_1 - C_1)^2 + (J_2 - C_2)^2$ ist ein die J_1J_2-Ebene mit dem Scheitel im Punkte P (C_1, C_2) berührendes Drehparaboloid, wobei nach Voraussetzung der Punkt P mit den Koordinaten C_1 und C_2 wegen $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ dem ganzen längs der Berandung offenen ersten Quadranten der J_1J_2-Ebene zum Variabilitätsbereich hat. Die Isohypsen der Fläche Φ sind konzentrische Kreise um P. Sie treffen in solchen Punkten berührend auf die Berandung von G, in denen die Normalen auf dem Rand durch P gehen. Die Normalen der Grenzparabel sind die Tangenten an deren Evolute, und da diese eine Kurve dritter Klasse ist, so gibt es durch P immer drei Normalen. Aus diesem Grunde ist auch die Eigenwertgleichung bei diesem Problem vom dritten Grade. Liegt P im ersten Quadranten oberhalb der Parabelevolute (siehe Bild 4, Lage P_{II}), so gibt es drei reelle Parabelnormalen durch P, rückt P auf die Evolute, so fallen zwei von ihnen zusammen und werden schließlich komplex, wenn P die Evolute überschreitet (siehe Bild 4, Lage P_I). In allen drei Fällen ist und bleibt aber entsprechend dem immer vorhandenen negativen und einfachen Eigenwert die Normale von P zu dem G begrenzenden Parabelzweig reell. Wir betrachten nun, zu den Extremen von Φ übergehend, den Punkt P zunächst in der Lage P_I innerhalb G. Die die Randkurven berührenden

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Isohypsen berühren diese von innen. Funktional- und überhaupt Randextreme im gewöhnlichen Sinne sind daher nicht vorhanden, dagegen liegt im Punkte $P(C_1, C_2)$ das reine, absolute Funktionsminimum Null vor, das von dem ganzen Kontinuum von geschlossenen und stetig differenzierbaren Kurven geliefert wird, die den Umfang C_1 und den Inhalt C_2 haben. Überschreitet P die Grenzparabel und geht in eine Lage P_{II} gemäß Bild 4 über, so fällt das Funktionsminimum fort. Dafür verläuft aber jetzt die den Grenzparabelzweig berührende Isohypse ganz außerhalb G, so daß das absolute Funktionsminimum durch das absolute Funktionalminimum abgelöst wird. Liegt P auf der Parabel, so fallen beide, das Funktions- und das Funktionalminimum, zusammen. In keinem Falle kommt, wie man vielleicht aufgrund des Verhaltens von Φ längs des Randes von G vermuten könnte, auf der J_1-Achse ein relatives Minimum zustande, da die berührenden Isohypsen in der Umgebung der Berührungspunkte immer innerhalb G verlaufen; wohl aber weist Φ in 0, der Spitze von G, immer ein relatives Maximum auf, das von den Nullkreisen geliefert wird; denn wo auch immer P in reinem Variabilitätsbereich hinwandern möge, immer verlaufen die Kreise um P durch 0 in einer gewissen Umgebung von 0 außerhalb G. Es ist nicht müßig, noch auf folgendes hinzuweisen. Rückt P aus dem Innern von G auf den Rand, so verringert sich der Spielraum, der den das simultane System von Integralgleichungen $J_1 = C_1$ und $J_2 = C_2$ lösenden und das Funktionsminimum liefernden Funktionen verbleibt immer mehr, in dem die zugehörigen, noch weitgehend willkürlichen Kurven gezwungen werden, sich mehr und mehr der kreisförmigen Gestalt zu nähern, die der Grenzlage von P auf dem Rande entspricht. Es existiert also auch hier funktionalanalytisch ein Limes, dem mit ständig wachsender Güte der Annäherung zugestrebt wird, so daß alles mit dem Funktionsminimum zusammenhängende gewissermaßen stetig in das Entsprechende beim Funktionalminimum übergeführt wird.

Als Abschluß der Beispiele zu diesem Problemtyp noch einige Worte zur Frage der Gleichgewichtsfigur einer schweren, an zwei Punkten aufgehängten Kette von gegebener Länge! – In der klassischen Variationsrechnung pflegt man das Problem so zu behandeln, daß man einfach das isoperimetrische Problem löst, bei festen Grenzen

$$J_1 = \int_{x_1}^{x} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

zu einem Minimum zu machen, wenn

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

gegeben ist. Bekanntlich ergibt sich ein absolutes Minimum längs der Extremalen, der Kettenlinien in ihrer ganzen Ausdehnung, konjugierte Punkte treten nicht auf. In unserer Methode gestalten sich die zur Lösung führenden Überlegungen etwas umständlicher, sind dafür aber begrifflich sauberer. Es handelt sich ja genau genommen nicht darum, das statische Moment J_1, sondern die Schwerpunktsordinate

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\frac{J_1}{J_2}$$

zu einem Extremum zu machen. Hierzu haben wir ebenfalls das erwähnte isoperimetrische Problem zu lösen, aber zu einem ganz anderen Zweck, nämlich zur Abgrenzung des Grundgebietes G. Über diesem ist dann als Fläche

$$\Phi(J_1 J_2) = \frac{J_1}{J_2},$$

das entsprechende hyperbolische Paraboloid, zu konstruieren und das über G befindliche Flächenstück nach Extremstellen abzusuchen. Es zeigt sich nun, wie wir ohne Rechnung mitteilen, daß ohne weitere zusätzliche Annahmen weder Funktions- noch noch Funktionalextreme vorhanden sind. Setzen wir aber $J_2 = \text{const.}$, wie es ja dem Fall entspricht, daß die Länge der Kette vorgeschrieben ist, so wird aus der Fläche eine geradlinige Erzeugende mit von Null verschiedener Steigung gegen die J_1J_2-Ebene herausgeschnitten, und auf dieser Erzeugenden gibt es ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum, nämlich an den beiden Stellen, an denen die Projektion der Erzeugenden in die J_1J_2-Ebene die Berandung von G überschneidet. Diesen Punkten entsprechen zwei Kettenlinien, die eine ergibt das Minimum von

$$\frac{J_1}{J_2}$$

und stellt die Gleichgewichtsfigur der schweren Kette dar; die andere, das Maximum ergebende, wird als Gleichgewichtsfigur erhalten, wenn man die Richtung der Schwerkraft umkehrt. Beide Kettenlinien sind zentrisch-symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Aufhängepunkte. Daß unsere Methode durch ihre begriffliche Sauberkeit der bisher üblichen überlegen ist, zeigt sich vor allem darin, daß wir nun in der Lage sind, die Frage nach der Gleichgewichtsfigur der Kette auch in dem viel allgemeineren Falle zu beantworten, daß zwischen J_1 und J_2 irgendeine Beziehung vorgeschrieben ist, etwa in der Form $\varphi(J_1, J_2) = 0$. Durch diese Gleichung wird auf dem über G liegenden Teil des hyperbolischen Paraboloides

$$\Phi = \frac{J_1}{J_2}$$

eine Flächenkurve erklärt, auf der die Punkte extremalen Abstandes des von der J_1J_2-Ebene festzustellen sind. Gibt es solche Punkte mit Projektionen innerhalb G, so liefern sie Funktionsextreme, zu denen die interessanten Funktionalextreme an die Stellen treten, an denen die Kurve $\varphi(J_1, J_2) = 0$ die Berandung von G schneidet. Welcher Art diese Extreme sind, ist meist geometrisch leicht zu entscheiden. So wie hier können natürlich auch in allen Fällen zusätzliche Nebenbedingungen berücksichtigt werden.

Damit wollen wir die Erörterung von Beispielen zu dieser Klasse von Problemen abschließen. Wir haben dabei absichtlich solche ausgewählt, bei denen keine Schwierigkeiten durch das Auftreten konjugierter Punkte längs der Extremalen entstehen konnten. Man kann diesen Schwierigkeiten, wie wir es zur Sicherheit bei der Formulierung

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

der Voraussetzungen getan haben, zwar aus dem Wege gehen, indem man nicht nur y, sondern auch x gewissen Beschränkungen unterwirft, doch nicht ganz, und zwar aus folgendem Grunde. Grundlegend für unsere Betrachtungen ist bei jedem Problem das Grundgebiet G, dessen Berandung, wenn alle hinreichenden Bedingungen der klassischen Variationsrechnung für das Austreten eines absoluten Extremums erfüllt sind, nach den dort entwickelten Methoden ermittelt werden kann. Was geschieht nun etwa mit dieser Berandung, wenn auf den Extremalen der zu einem Ausgangspunkt konjugierte überschritten wird?

Wir beantworten sie, indem wir zunächst wieder fragen, ob denn überhaupt etwa durch das Auftreten konjugierter Punkte das Eintreten eines Extremums in Frage gestellt ist. Das ist keineswegs der Fall, denn das Auftreten dieser Punkte zeigt ja nur an, daß die durch Integration der Eulerschen Differentialgleichungen gewonnenen Extremalen das gesuchte Extremum unter diesen Umständen nicht liefern, daß also, mit anderen Worten, nur eine gewisse spezielle Methode, so gut brauchbar sie in anderen Fällen auch sein mag, in diesem Falle versagt. Und so verhält es sich nicht nur mit den konjugierten Punkten, sondern mit vielem, was die klassische Variationsrechnung lehrt. Die Dinge liegen hier ganz ähnlich wie bei folgendem Sachverhalt. Maxima und Minima reeller Funktionen bestimmt man unter gewissen, meist erfüllten Voraussetzungen sehr einfach und befriedigend nach den Methoden der Differentialrechnung. Ist es aber erlaubt, deswegen an der Existenz des Maximums und Minimums einer in einem abgeschlossenen Bereich stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion zu zweifeln, nur weil uns die Methode der Differentialrechnung bei der Ermittlung der Extremstellen im Stich lassen? – Gewiß nicht! – Man hat in diesem Falle nur die Methode zu wechseln und sich etwa der urwüchsigeren und wirksameren Methode der Gebietsschachtelungen zu bedienen. Ähnlich liegen die Dinge bei den von uns aufgerollten Fragen in der Variationsrechnung. Wegen der Grundsätzlichkeit und Wichtigkeit sei es uns gestattet, an Hand eines einfachen, drastischen Beispiels etwas eingehender dazu Stellung zu nehmen. Wir betrachten einen Kreis – den Grundkreis K – mit einer Evolvente, der wir uns, um nicht fortgesetzt mit Unklarheiten wegen auftretender Vieldeutigkeiten kämpfen zu müssen, mit dem ersten Schnittpunkt der von der Spitze S ausgehenden Zweige abgeschlossen denken, so daß eine herzförmige Kurve entsteht (siehe Bild 5). Die Aufgabe, die kürzeste Entfernung eines Punktes Q im Innern der Evolvente von dieser zu bestimmen, führt im Sinne der klassischen Variationsrechnung zur Betrachtung des transversal – in diesem Falle orthogonal – von der Evolvente ausgehenden Extreminalenfeldes. Die Extremalen sind Tangenten an den Grundkreis K, deren Berührungspunkte P_r zu den Ausgangspunkten P auf der Evolvente konjugiert sind. Wir sehen, daß durch die Punkte im Innern von K keine Extremalen des Feldes gehen. Folgt daraus, daß diese Punkte R eine kürzeste Entfernung von der Evolvente haben? – Keineswegs! – Die kürzeste Entfernung ist dann einfach RS, die geradlinige Verbindung von R mit der SpitzeS der Evolvente. Nur ist für dieses zweifellos vorhandene Extremum kein Raum in der Feldtheorie der klassischen Variationsrechnung. Es ist noch etwas mehr dazu zu sagen, was im engsten Zusammenhang steht mit Überlegungen, die schon G. Darboux bei den geodätischen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

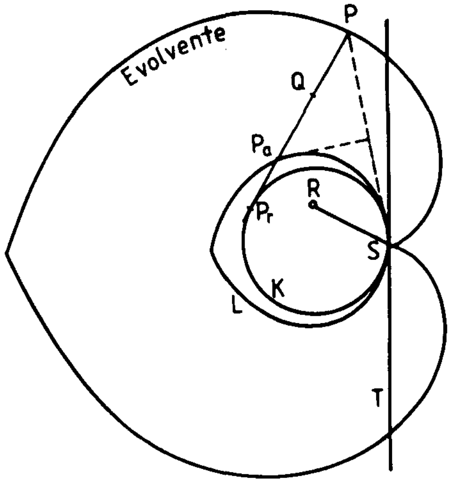

Bild 5:
Evolvente mit herzförmigem Kurvenanteil.

Linien auf krummen Flächen anstellte. Bewegt sich ein Punkt Q_1 von P ausgehend, ins Innere der Evolvente, so liefert zunächst QP das absolute Minimum der Entfernung; denn ein Kreis um Q durch P trifft die Evolvente zu keinem weiteren Punkt als P. Entfernt sich aber Q von P so weit, daß dieser Kreis im Punkte S an der Evolvente aufstößt – es trete das für $Q = P_a$ ein –, so löst das Minimum auf, absolut zu sein; denn bei noch weiterer Entfernung von Q über P_a hinaus schneidet der Kreis um Q durch die Evolvente in einem Punkt zwischen P und S, und die Entfernung QP ist daher nur noch ein relatives Minimum, das schließlich aber auch ein Ende findet, wenn Q im Punkte P_r die Peripherie des Grundkreises K erreicht. Alle Punkte P_a, die Schnittpunkte von PR_1 mit den Mittellaten auf PS bei variablem P, erfüllen eine Kurve l, die den Grundkreis K einschließt. Punkte Q außerhalb von l haben den kürzesten Abstand QP, Punkte Q innerhalb l den kürzesten Abstand QS von der Evolvente, und dieser Abstand ist vernünftigerweise eine stetige Funktion des Ortes von Q, auch beim Überschreiten von l. Folgt man hingegen den Pfaden der klassischen Variationsrechnung, so ergibt sich beim Überschreiten des Grundkreises eine Unstetigkeit des Abstandes, weil, wie leicht ersichtlich, das zwischen P_a und P_r noch vorhandene relative Minimum beim Überqueren von K unstetig in das dann eintretende absolute Minimum übergeht; denn QP strebt ja mit $Q \rightarrow P_r$ der Länge des Kreisbogens P_rS zu, während in P_r das absolute Minimum gleich der geradlinigen Entfernung P_rS ist. Wir sehen aus diesem mit Absicht möglichst elementar gewählten Beispiel, daß die bisher in der klassischen Variationsrechnung entwickelten Methoden auch für unsere Zwecke dringend der Ergänzung durch die wirksamen direkten Methoden bedürfen. Denn bei der für unsere Betrachtungen fundamentalen Abgrenzung des Grundgebietes G für eines unserer Probleme kommt es nur auf absolute Extremwerte an, und hat man erst einmal G gefunden, so

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

kann man die Extremwerte der gegebenen Funktionalfunktion, wenn es sein muß, innerhalb G auch P durch Gebietsschachtelungen ausfindig machen, und das alles ohne Rücksicht darauf, ob hierbei Variations- oder Differentialrechnung versagen oder nicht. Das in aller Deutlichkeit zu zeigen, war der Zweck dieser Abschweifung, die leider zur Klärung der Sachlage nötig war. Um nichts unaufgeklärt zu lassen, bemerken wir übrigens, daß das Versagen der allgemeinen Methoden der Variationsrechnung in unserem Beispiel in der Tat, wie es ja auch kaum anders sein kann, auf eine Störung in der Differenzierbarkeit einer gewissen Funktion zurückzuführen ist. Betrachten wir nämlich, der sogenannten Differentiationsmethode im Fall variabler Endpunkte folgend, die geradlinige Entfernung $QP = l$ als Funktion der etwa von S in der einen Richtung positiv, in der entgegengesetzten Richtung negativ gewählten Bogenlänge SP auf der Evolvente – die Gesamtlänge des herzförmigen Kurventeils in Bild 5 sei 2σ – so zeigt sich Folgendes: Liegt Q innerhalb des Grundkreises K, so gibt es in dem von s durchlaufenen Intervall $-\sigma \leq s \leq +\sigma$ keine Stelle, in der die Funktion $l(s)$ eine verschwindende Ableitung hat. Die in kartesischen Koordinaten darstellende Kurve steigt, von der Stelle $s = 0$ ausgehend, nach beiden Seiten monoton an und hat an der Stelle $s = 0$, an der sie ihr Minimum, die gerade Strecke QS, erreicht, eine Ecke, ist dort also nicht differenzierbar. Daher versagt hier die landläufige Methode der Differentialrechnung, diese Stelle durch Nullsetzen von $l'(s)$ zu ermitteln, und das ist auch der Grund für das Versagen der klassischen Variationsrechnung. Liegt Q zwischen K und L, so erhält zwar $l'(s)$ eine Nullstelle im Intervall $-\sigma \leq s \leq +\sigma$, dort ist das zugehörige relative Minimum immer noch größer als das absolute in der Ecke der Kurve für $s = 0$. Erst wenn Q außerhalb L liegt, liefert die Nullstelle vor $l'(s)$ das absolute Minimum. In der Ecke für $s = 0$ haben wir nur mehr ein relatives Minimum, dies aber auch nur, so lange Q links vor der Tangente ST an K und L im Punkt S liegt (siehe Bild 5). Überschreitet Q diese Gerade, so geht das relative Eckenminimum sogar in ein relatives Eckenmaximum über. Liegt Q auf ST, so weist die Kurve $l(s)$ für $s = 0$ einen Wendepunkt mit stetig sich ändernder Tangente, aber unstetiger Krümmung auf. So ist bei Aufgaben dieser Art ganz wie in der Differentialrechnung auf Stellen Rücksicht zu nehmen, zu denen keine Differenzierbarkeit vorliegt. Aber auch die in der Theorie der reellen Funktionen mit zu berücksichtigenden Randextreme haben in der Variationsrechnung ein gewisses Analogon, wenn wir etwa Feldbeschränkungen eintreten lassen. Ein einfaches Beispiel: Bei der Aufgabe, die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer geraden Strecke AB zu finden, ergibt sich ein begrenztes Feld paralleler Geraden als Extremalen, die Bahnkurven der Punkte von AB bei Parallelverschiebung dieser Strecke senkrecht zu ihrer Richtung. Liegt ein Punkt Q innerhalb dieses Feldes und ist P der Fußpunkt des von Q auf AB gefällten Lotes, so ist QP die gesuchte kürzeste Entfernung. Liegt aber Q außerhalb des Feldes, so ergibt sich als Lösung die kleine der beiden Strecken AQ oder QB. Übrigens läßt sich in diesem Falle wie überhaupt bei ähnlichen Aufgaben die klassische Weierstraßsche Feldtheorie dadurch aufrecht erhalten, daß man das Normalenfeld von AB beiderseits abschließt und ergänzt durch die sich daran anschließenden Hälften der von A und B ausstrahlenden Extremalenfelder. Die Transversalen des Gesamtfeldes setzen sich dann aus geraden Strecken von der

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

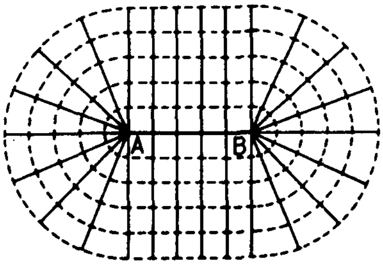

Bild 6:
Die Transversalen bestehen aus geraden Strecken und Halbkreisen.

Länge AB und aus Halbkreisen zusammen (siehe Bild 6). Das ist auch in bester Übereinstimmung mit Ideen, die S. Lie in seiner Geometrie der Berührungstransformationen entwickelt hat. Hiernach ergeben sich die Transversalen des Feldes als Wellenkurvensystem nach dem Huygensschen Prinzip, wenn als Elementarwellenkurve die Carathéodorysche Indikatrix des Variationsproblems (in unserem Falle ein Kreis) zugrunde gelegt wird. Die Extremalen sind hierbei die Kurven im Sinne der geometrischen Optik die Strahlen, die das Feldtransversalensystem überall transversal durchsetzen. Offenbar kann man diese Ausweitung des Feldbegriffes ganz allgemein vornehmen, wenn die Ausgangskurve nicht nur beliebig begrenzt, sondern irgendwie aus beliebigen Teilen zusammengesetzt, ganz allgemein also nicht analytisch ist. Sollte sie gleichwohl überall stetig gekrümmt sein, so ergibt sich übrigens aufgrund eines bekannten Satzes von Bliss, daß dann auch in dem zusammengesetzten Feld die konjugierten Punkte eine stetige Kurve erfüllen. Wenden wir die eben dargelegte Methode auf das eingehend behandelte Beispiel der Kreisevolvente an, so erhalten wir im Innern der herzförmigen Kurve ein zusammengesetztes Extremalenfeld, das mit seinen Transversalen in Bild 7 dargestellt ist. Die Kurve l und an sie anschließend ein Segment θ der Evolvententangente in S bilden hierzu Grenzkurven, die Kurven gleichen Abstandes, in denen die Teilfelder, aus denen das Ganze zusammengesetzt ist, zusammenstoßen. Durch das Aufhören der Teilfelder in diesen Grenzkurven werden Vieldeutigkeiten vermieden und lückenloser Anschluß gewährleistet. Die gestrichelt gezeichneten Transversalen setzen sich aus Kreisbögen um S und Evolventenbögen zusammen, sie sind einfach die Parallelkurven des herzförmigen Kurventeils der Ausgangsevolvente im Sinne der geometrischen Optik das von dieser Kurve abgestrahlte Wellensystem. Ihre Kuckpunkte liegen auf L und θ, den Kurven, auf denen z w e i Extremalenabstände gleich sind, und mit wachsendem Extremalenabstand stehen die Transversalen dem Schnittpunkt von L und θ, gewissermaßen dem Mittelpunkt der ganzen Kontiguration zu, in dem sogar d r e i Extremalenabstände gleich werden. Die Extremalen des zusammengesetzten Feldes, bestehend aus dem Normalsystem der Ausgangsevolvente und dem Strahlenbüschel durch S, sind in Bild 7 voll gezeichnet. Es besteht wohl kein Zweifel, daß bei Zugrundelegung dieses vervollständigten zusammengesetzten Feldes, das Extremum QS, wenn Q innerhalb des Grundkreises K der Ausgangsevolvente

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

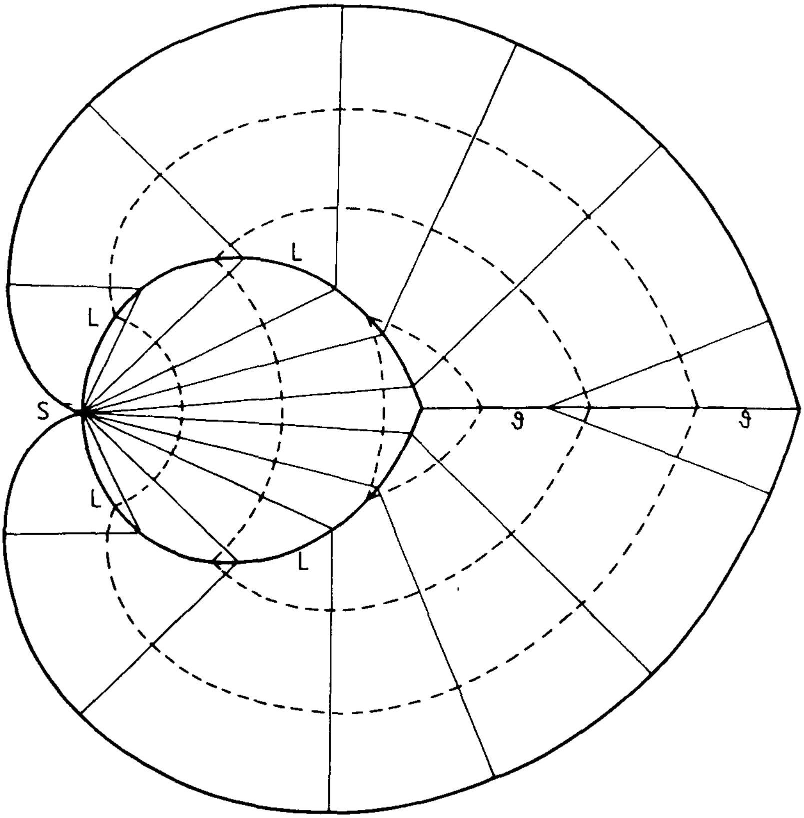

Bild 7:
Die herzförmige Kurve mit Transversalen.

liegt, nicht übersehen werden kann, so daß das anfänglich bemängelte Versagen der Variationsrechnung damit behoben ist. Dies ist natürlich nur ein Beispiel für viele andere. In ähnlichen Fällen läßt sich selbstverständlich auch bei ganz allgemeinen Carathéodoryscher Indikatrive für solche Felder die klassische Feldtheorie entwickeln, d.h. es lassen sich mittels der Hamiltonschen Prinzipalfunktion, des Beltrami-Hilbertschen invarianten Integrals, des Weierstraßschen Feldintegrals, schließlich auch des Brunnschen Pikonats in der geometrischern Optik – letzten Endes läuft ja das alte auf dasselbe hinaus – hinreichende Bedingungen für das Auftreten eines absoluten Extremums aufstellen. Interessant ist, daß die für solche Felder weniger wichtigen konjugierten Punkte hierbei gar nicht in Erscheinung treten (vgl. den Hinweis am Beginn des Artikels). Mögen die vorstehenden Ausführungen als Beispiel dafür dienen, wie die hier vorgeschlagene Weiterführung der Variationsrechnung rückwirkend die Klärung von Fragen in den grundlegenden Theorien dieses Kalküls erheischt und so auch in dieser Richtung befruchtend wirkt!

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Wir kehren nun wieder zu unserer Aufgabe zurück, $\Phi(J_1,J_2)$ bei von einander abhängigen Funktionalen J_1J_2 zu einem Extremum zu machen, wobei wir der Einfachheit halber zunächst feste Endpunkte der zu variierenden Kurve vorausgesetzt haben oder was damit gleichwertig ist, ihre Geschlossenheit. Liegen andere Randbedingungen vor, sind etwa die Endpunkte der zu variierenden Kurve auf festen Kurven beweglich oder gar vollkommen frei, so sind in δJ_1 und δJ_2 die bei der üblichen partiellen Integration aus dem Integralzeichen heraustretenden Glieder nicht von vornherein zu unterdrücken, sondern in $\delta\Phi$ mit zu berücksichtigen, jedoch auf Grund von in der Variationsrechnung geläufigen Schlüssen, so daß die integralfreien Glieder in $\delta\Phi$ für sich zum Verschwinden gebracht werden. Für die Extremalen ergibt sich dann dieselbe Integrodifferentialgleichung wie bei dem Problem mit festen Endpunkten, nur sind jetzt in der Zwischenlösung mit noch nicht durch die Eigenwertgleichung spezialisiertem λ die Integrationskonstanten auf anderer Grundlage zu bestimmen, z.B. bis auf festen Kurven beweglichen Endpunkten auf Grund der Verallgemeinerung der Transversalitätsberechnung, die durch Nullsetzen der integralfreien Glieder in $\delta\Phi$ erhalten wird. Die Überlegungen, die von dieser Zwischenlösung zu der die Eigenwerte bestimmenden Gleichung führen, laufen dann in denselben Bahnen wie früher, so daß wir wohl auf weitere Ausführungen darüber verzichten können. Auch ist nach dem bisher Gesagten klar, wie sich z.B. die Lösungsmethode ändert, wenn Φ eine Funktion dreier Funktionale J_1,J_2,J_3 ist, die ihrerseits von einer einzigen variierbaren Funktion $y(x)$ abhängen. Setzen wir dann

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}:\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}=\lambda \text{ und } \frac{\partial\Phi}{\partial J_3}:\frac{\partial\Phi}{\partial J_1}=\mu;$$

so erhalten wir für die Lösung der Integrodifferentialgleichung, die sich für $y(x)$ ergibt, unter Berücksichtigung der Randbedingungen eine noch von λ und μ abhängige Zwischenlösung, mit der die Definitionsgleichungen für λ und μ in die diese Eigenwerte festlegenden Gleichungen übergehen. Dieselbe Gleichung $\delta J_1+\lambda\delta J_2+\mu\delta J_3=0$, die zu der Integrodifferentialgleichung für $y(x)$ führt, gehört als Euler-Lagrangesche Differentialgleichung zu dem isoperimetrischen Problem, J_1 zu einem Extremum zu machen, wenn J_2 und J_3 vorgegeben sind, nur sind jetzt λ und μ isoperimetrische Konstante, die den gesamten Wertvorrat für die Eigenwerte bei allen erdenklichen Funktionen Φ darstellen. Mit der die Randbedingungen befriedigenden Zwischenlösung der Integrodifferentialgleichung für $y(x)$ ergeben sich J_1, J_2 und J_3 als Funktionen von λ und μ. Fassen wir hierin λ und μ als Gaußsche Flächenparameter auf, so wird dadurch im $J_1J_2J_3$-Raum, wie aus dem isoperimetrischen Problem folgt, gerade die Berandung des Grundgebietes G festgelegt, das den Funktionalen J_1,J_2,J_3 zugänglich ist. Hiernach lassen sich die noch erforderlichen Überlegungen ganz ähnlich gestalten wie in dem ausführlich erörterten Falle. Und so geht das weiter. Natürlich wachsen die zu bewältigenden rechnerischen Schwierigkeiten mit der Zahl der in Φ auftretenden Funktionale stark an, zumal wenn diese nicht mehr sämtlich von einer einzigen Funktion $y(x)$ abhängen, sondern in Gruppen zerfallen, wobei zwar für jede Gruppe die unabhängige, zu variierende Funktion dieselbe, diese jedoch von Gruppe zu Gruppe ver-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

schieden ist. Schließlich können auch die Funktionale $J_1J_2\dots$ in Φ etwa Integrale verschiedener Vielfachheit oder auch wie bei den isoperimetrischen, Lagrangeschen und Mayerschen Problemen an gewisse Nebenbedingungen gebunden oder auch aus Lösungen von Differentialgleichungen sein. Auch kann es vorkommen, daß sie nicht explizit in Φ auftreten, sondern z.B. als Parameter einen Integral, von dessen Wert Φ abhängt. Durch all dies wird die Funktion der die Lösung vermittelnden Integrodifferentialgleichung nicht beeinflußt, wohl aber die Bestimmung der Eigenwerte mit weiteren, vielleicht sogar nur schwer zu überwindenden Schwierigkeiten belastet. Wir wollen damit diese sonst ins Uferlose gehende Aufzählung beschließen und nur noch bemerken, daß auch Funktionale J, die bisher in der klassischen Variationsrechnung nicht betrachtet wurden, bei allen bisher behandelten Problemen als unabhängige Veränderliche mit herangezogen werden können. Wir begnügen uns mit der Besprechung zweier wichtiger Typen, einem Funktional in Gestalt eines bestimmten Integrals, das von einer variierbaren Funktion y(x) und außerdem von verfügbaren Parametern abhängt und einer Verallgemeinerung dieses Typs, bei der die Parameter durch Funktionale ersetzt sind.

Liegt ein Funktional

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y';c)\,dx$$

— der Einfachheit halber bei festen Grenzen — vor, bei dem der Integrand außer von x,y,y' noch von einem veränderlichen Parameter c abhängt, so ist die erste Variation von

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\delta y'}\right)\delta y dx + \delta c \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c}\,dx.$$

Aus der Unabhängigkeit von δy und δc schließen wir, daß für das Verschwinden von δJ notwendigerweise

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\delta y'} = 0 \text{ und} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c}\,dx = 0$$

sein muß. Die erste Gleichung liegt zusammen mit den Randbedingungen der Extremalen in der Form $y=y(x,x_1,x_2,y_1,y_2;c)$ fest bis auf den Wert c, der aus der zweiten Gleichung zu ermitteln ist, nachdem in dieser die genannte Lösung y — die Zwischenlösung, wie wir sagen wollen — eingetragen wurde. Es liegt hier also wieder ein ganz charakteristisches Eigenwertproblem vor, das, obwohl es eigentlich der einfachste Typ dieser Art ist, bisher nicht beachtet wurde. Das Vordringen von der eben aufgestellten notwendigen Bedingung zu hinreichenden Bedingungen kann ganz ähnlich erfolgen, wie in den Fällen, in denen sich für die Lösung eine Integrodifferentialgleichung ergab. Nachdem wir nämlich eingesehen haben, daß die Lösung unbedingt als Sonderfall in

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

der angegebenen Zwischenlösung enthalten sein muß, können wir diese in das zum Extremum zu machende Integral eintragen, womit dieses dann als Funktion von c erscheint. Diese Funktion J(c) untersuchen wir nur nach den Methoden der Differentialrechnung, bilden also $J'(c) = 0$ und entnehmen dann aus der Taylorentwicklung von J(c) in der Umgebung jeder Nullstellen von J'(c), ob sie ein Extremum liefert oder nicht, und welcher Art es ist. Mit der Zwischenlösung y ergibt sich

$$J'(c) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial c} \right) dx,$$

und hieraus, da

$$\frac{\partial y'}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial c} = \left(\frac{\partial y'}{\partial c} \right)$$

ist, durch partielle Integration

$$J'(c) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c} dx + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial c} \Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial c} dx.$$

Nun ist aber, da die Zwischenlösung so aufgebaut ist, daß für alle Werte von c, $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ – beide fest – sind,

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c} \right]_{x=x_1} = \left[\frac{\partial y}{\partial c} \right]_{x=x_2} = 0,$$

so daß das integralfreie Glied wegfällt. Ebenso verschwindet das zweite Integral rechter Hand, da die Zwischenlösung die Eulersche Differentialgleichung befriedigt. Wir finden daher, wie zu erwarten war,

$$J'(c) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c} dx,$$

d.h. die Nullstellen von J'(c) sind mit den Eigenwerten identisch. Nach dem Vorstehenden ist demnach

$$\frac{d^n J(c)}{dc^n} = \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c} dx,$$

wobei im Gegensatz zu der Operation

$$\frac{\partial}{\partial c},$$

bei der auf die Abhängigkeit der Zwischenlösung y von c keine Rücksicht zu nehmen ist, dies aber bei der Operation

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}$$

wohl zu geschehen hat. Damit haben wir jetzt alles Erforderliche in der Hand, die Extreme von $J(c)$ zu ermitteln, doch sind dies leider nur die Extreme bei festgelegtem y und variablem c. Was wir brauchen, sind aber die Extreme, wenn sowohl y als auch c veränderlich sind. Da ist noch eine kleine Schwierigkeit zu überwinden. Nehmen wir etwa an, für alle Werte c in einer gewissen Umgebung eines Eigenwertes c_0 habe J als Funktional von $y(x)$ bei festgehaltenem c ein absolutes Minimum. Weist dann auch $J(c)$ für $c=c_0$ ein Minimum auf, so sind wir sicher, daß dann J für $c=c_0$ und jene Zwischenlösung, in der c durch c_0 ersetzt ist, ein Minimum wird, und zwar bei veränderlichem y *und* c. Weist hingegen $J(c)$ für $c=c_0$ ein Maximum auf, so besitzt J für $c=c_0$ *kein* Extremum, sondern, wenn man die gewohnte Ausdrucksweise auf diesen Fall übertragen darf, einen Sattelwert. Mit anderen Worten: Damit J ein Extremum als Funktional von y und Funktion von c werde, müssen die Extremumsarten – Maximum oder Minimum – von J bei festem c als Funktional von y und, nach Einführung der Zwischenlösung y, bei so festgelegtem y als Funktion c übereinstimmen. Wir bringen sogleich in enger Anlehnung an Beispiel II ein möglichst einfaches Beispiel IV. Es liege die Aufgabe vor, wenn l eine gegebene Länge, $x_2 > x_1, y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ ist,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + 2cy + c^2 l^2)\, dx$$

zu einem Extremum zu machen, und zwar durch passende Wahl der Funktion $y(x)$ und des Parameters c, der die Dimension einer reziproken Länge besitzt. Es ist in diesem Falle

$$\frac{1}{2}\,\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (c - y'')\,\delta y dx + \delta c \int_{x_1}^{x_2} (y + cl^2)\, dx = 0$$

zu setzen, woraus $y'' = c$ und hieraus unter Berücksichtigung der Randbedingungen die Zwischenlösung

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{c}{2}(x_2 - x_1)\right](x - x_1) + \frac{c}{2}(x - x_1)^2$$

folgt. Sie liefert bei festem, beliebigem c ein absolutes starkes Minimum für J, wie sich aus der Weierstraßschen E-Funktion ergibt, und zwar für jeden Wert von $x_2 - x_1$. Konjugierte Punkte treten nicht auf. Mit dieser Zwischenlösung y ist

$$J'(c) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial c}(y'^2 + 2cy + c^2 l^2)\, dx = 2\int_{x_1}^{x_2} (y + cl^2)\, dx.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Dabei ist

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = (x_2-x_1)\left[\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{c}{12}(x_2-x_1)^2\right].$$

Hieraus folgt

$$J'(c) = (x_2-x_1)\left\{(y_1+y_2)+2c\left[l^2 - \frac{(x_2-x_1)^2}{12}\right]\right\},$$

so daß also

$$J'(c) = 0$$

$$c = \frac{6(y_1+y_2)}{(x_2-x_1)^2-12l^2} = c_0$$

zur Folge hat. Da

$$J''(c) = 2(x_2-x_1)\left[l^2 - \frac{(x_2-x_1)^2}{12}\right]$$

ist, so zeigt sich, daß J(c) nur dann als Funktion von c ebenfalls ein Minimum aufweist, wenn

$$x_2-x_1 < 2l\sqrt{3}$$

ist, da ja dann $J''(c)>0$ sein muß. Ist diese Ungleichung erfüllt, so ergibt sich für

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{c_0}{2}(x_2-x_1)\right](x-x_1) + \frac{c_0}{2}(x-x_1)^2 \text{ und } c=c_0$$

für J als Funktional von y u n d als Funktion von c ein sogar a b s o l u t e s und starkes Minimum. Ist hingegen $x_2-x_1>2l\sqrt{3}$, so existiert kein Extremum, da ein Sattelwert vorliegt. Mit $x_2-x_1\to 2l\sqrt{3}$ rückt c_0, wenn $y_1+y_2 \neq 0$ ist, ins Unendliche, und es kann demnach für $x_2-x_1=2l\sqrt{3}$ kein Extremum vorhanden sein; in diesem Falle wird ja auch $J'(c)=(x_2-x_1)(y_1+y_2)\neq 0$, d.h. J(c) ist eine monotone Funktion konstanter und von Null verschiedener Steigung. Wird aber neben $x_2-x_1=2l\sqrt{3}$ noch dazu $y_1+y_2=0$, so wird c_0 ganz beliebig; dann ist nämlich $J'(c)\equiv 0$, J(c) also von c gänzlich unabhängig. In der Tat ist der Wert von J(c) in diesem Falle

$$\int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx = \frac{(y_2-y_1)^2}{x_2-x_1} + \frac{c^2}{12}(x_2-x_1)^3.$$

$$J(c) = \frac{(y_2-y_1)^2}{x_2-x_1},$$

und das gilt also für alle Zwischenlösungen bei beliebigem c. Daher liefert in diesem Ausnahmefalle das ganze durch die Zwischenlösung dargestellte Parabelbüschel ein eigentliches, absolutes Minimum. Trotz der großen Einfachheit der Aufgabe nicht vorherzusehende Ergebnisse!

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Der Übergang zu mehreren Parametern macht nun gar keine Schwierigkeiten bei festen Grenzen

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y';c_1,c_2 \dots c_n)\,dx,$$

so ergibt sich für ein Extremum als notwendige Bedingung

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx - \sum_{k=1}^{n} \delta c_k \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c_k}\,dx = 0,$$

woraus für y die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

und für die Eigenwerte der Parameter die Gleichungen

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c_k}\,dx = 0 \quad (K = 1,2 \dots n)$$

folgen. Mit der Zwischenlösung y, die das die Randbedingungen befriedigende Integral der Eulerschen Differentialgleichung ist, bilden wir das Integral J, das dann als Funktion von $c_1,c_2 \dots c_n$ erscheint. Ganz entsprechend wie beim Vorliegen nur eines Parameters folgen die verkürzten Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial c_k}\,dx \quad (K = 1,2 \dots n),$$

woraus zu schließen ist, daß die Eigenwertgleichungen mit

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0 \quad c = 1,2 \dots n)$$

identisch sind. Die höheren Ableitungen von J nach dem c_k, die wir zur Klärung der Frage brauchen, ob wirklich Extremwerte vorliegen, sind dann natürlich aus den zuletzt angeschriebenen, verkürzten Gleichungen so zu bilden, daß bei weiteren Differentiationen auch auf die Abhängigkeit der Zwischenlösung von den c_k Rücksicht zu nehmen ist. Hat J nach Eintragen der Zwischenlösung als Funktion von $c_1,c_2 \dots c_n$ ein Extremum von gleicher Art wie das absolute von J bei festen $c_1,c_2 \dots c_n$ als Funktional von y(x), dann hat auch J ein entsprechendes Extremum als Funktional von y *und gleichzeitig* als Funktion von $c_1,c_2 \dots c_n$, in allen anderen Fällen aber nicht.

Ein Sonderfall, der besonderes Interesse darbietet, soll nicht unerwähnt bleiben, da er gewissermaßen eine verschärfte Variante des isoperimetrischen Problems darstellt. Treten die Parameter in J nur linear auf, ist also J von der besonderen Form

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$J = \int_{x_1}^{x_2} [g(x,y,y') + \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(k,y,y')]\, dx,$$

so ist die Zwischenlösung dieselbe wie die Lösung des isoperimetrischen Problems

$$\int_{x_1}^{x_2} \partial(x,y,y')\, dx$$

zu einem Extremum zu machen, wenn die Werte der Integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} h_k(x,y,y')\, dx \quad (K = 1,2 \ldots . n)$$

vorgeschrieben sind. Da die Eigenwertgleichungen in diesem Falle

$$\int_{x_1}^{x_2} l_k(x,y,y')\, dx = 0 \quad (K = 1,2 \ldots . n)$$

lauten, so ist die Lösung unseres Problems der variablen Parameter, wenn sie überhaupt verstanden ist, übereinstimmend mit der des isoperimetrischen Problems in dem Falle, daß die vorgeschriebenen Integrale den Wert Null haben. Trotzdem ist unser Problem nicht identisch mit dem isoperimetrischen, denn es verlangt etwas anderes und zwar etwas mehr als dieses. Bei dem isoperimetrischen Problem sind die c_r die isoperimetrischen Konstanten, die durch die Gegebenheiten des Problems festgelegt und keiner Wandlung fähig sind, bei unserem Problem hingegen verfügbar bleibende Parameter, die als Variable maßgeblich an dem Zustandekommen des Extremums beteiligt sind. Daher verlangen auch die hinreichenden Bedingungen bei unserem Problem wesentlich mehr als bei den isoperimetrischen, wie es ja auch schlicht gesagt ist, daß die Lösung des isoperimetrischen Problems trotz völliger Übereinstimmung auch das unsere löst. L braucht ja z.B. nur zu einem Eigenwertsystem $c^{(0)}, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_n^{(0)}$, J als Funktion von $c_1, c_2 \ldots, c_n$ bei festem y (Zwischenlösung) kein Extremum aufzuweisen. Nun hat wohl das isoperimetrische Problem eine Lösung, unser Problem der variablen Parameter aber nicht.

Wir gehen nun dazu über, den allgemeineren Fall zu betrachten, daß die Parameter ebenfalls Funktionale sind, wollen uns aber hierbei auf ein einziges Funktional als Parameter beschränken, da wir hieran sofort sehen werden, wie wir den Anschluß an schon eingehend Erörtertes gewinnen.

Es liege also folgendes Problem vor, bei festen Grenzen

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x,y,y'; J_2)\, dx$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

durch passende Wahl von $y(x)$ zu einem Extremum zu machen, wenn mit demselben y

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x,y,y')\,dx$$

ist. Die erste Variante von J_1 hat folgende Form

$$\delta J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right) \delta y dx + \delta J_2 \int_{x_2}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right) + \int_{x_2}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\,dx. \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right)\right] \delta y dx.$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung erfordert daher das Verschwinden von δJ_1 bei beliebigem δy das Bestehen der Integrodifferentialgleichung

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right) + \lambda \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right) = 0, \tag{6}$$

in der

$$\lambda = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\,dx \tag{6'}$$

gesetzt ist, und in der wir uns überall J_2 durch das entsprechende Integral ersetzt zu denken haben. Da, wenn über y irgendwie verfügt ist, J_2 und λ Konstante sind, so sehen wir, daß (6) als Sonderfall in der Eulerschen Differentialgleichung (6″) enthalten ist, die wir aus (6) gewinnen, indem wir J_2 und λ irgend zwei ganz beliebige konstante Werte erteilen. Wir denken uns nun (6″) integriert und unter Heranziehung der Randbedingungen ähnlich wie früher die Zwischenlösung y hergestellt, die (6″) löst und für die $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ ist, und zwar unabhängig von J_2 und λ. Sie hängt natürlich noch von diesen beiden Größen ab, besitzt aber die Struktur $y = y(x; x_1, x_2, y_1, y_2; J_2, \lambda)$. Tragen wir sie in die Gleichung

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x,y,y')\,dx$$

ein, so können wir hieraus J_2 unter Beachtung der Tatsache, daß diese Größe auch als Parameter unter dem Integralzeichen, nämlich implizit in y, auftritt, als Funktion von λ berechnen. Durch diese Funktion ersetzen wir nun noch J_2 in (6′), womit (6′) in die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte λ übergeht, für die unsere Aufgabe möglicherweise eine Lösung besitzt. Mehr kann aus (6) nicht gefolgert werden, leider zu wenig, um von einer befriedigenden Lösung des Problems sprechen zu können. Glücklicherweise weist aber die Struktur der Funktionalgleichung (6) darauf hin, wie wir

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

ähnlich wie früher auch in diesem Fall zu hinreichenden Bedingungen für das Eintreten eines Extremums gelangen können. Wir fragen dazu wieder am einfachsten nach dem Gebiet der J_1J_2-Ebene, das den beiden Funktionalen J_1 und J_2 zugänglich ist, und denken es uns durch Segmente der Geraden J_2-const. überdeckt. Die Endpunkte dieser Segmente sind gegeben durch die absoluten Extremwerte von J_1 bei vorgegebenem J_2. Sie sind also zu ermitteln durch Lösen eines isoperimetrischen Problems, das insofern eine Variante des gewöhnlich so genannten Problems ist, als in unserem Falle das zum Extremum zu machende Integral noch das konstant zu haltende als Parameter enthält, was aber keine Schwierigkeiten mit sich bringt, da ja eben das zweite Integral als konstanter Parameter in das erste eingeht, und das Auftreten von Konstanten in diesem ist ja wohl nicht nur nicht verboten, sondern sogar unvermeidlich. Beim Problem der Kettenlinie erscheint ja auch die vorgegebene Länge l der Kette im Nenner des zum Extremum zu machenden Integrals, der Schwerpunktsordinate

$$\eta = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\frac{dx}{l},$$

ohne daß daran Anstoß genommen werden kann. Auch dort hat man es mit einem isoperimetrischen Problem der hier bei uns auftretenden Art zu tun. Es bestehen nach alledem keine Bedenken, die bekannten Methoden auch in unserem Falle anzuwenden. Da zeigt sich nun, daß die Eulersche Differentialgleichung des Problems, J_1 bei festem J_2 zum Extremum zu machen, gerade wieder mit (6″) identisch ist, so daß also wieder die Gesamtheit der isoperimetrischen Konstanten λ den Wertevorrat für die Eigenwerte bildet. Berechnen wir nun, wie es oben geschehen ist, mit Hilfe der Zwischenlösung y J_2 als Funktion von λ und hiermit dann ebenfalls noch J_1 als Funktion von λ durch Auswertung des Integrals

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x,y,y';J_2)\,dx,$$

so stellen die Gleichungen $J_1 = J_1(\lambda)$ und $J_2 = J_2(\lambda)$, wie schon früher auseinandergesetzt wurde, gerade die Berandung des Grundgebietes G dar, das J_1 und J_2 zugänglich ist, hat zwar in Parameterdarstellung mit λ als Parameter. J_1 unter den vorliegenden Gegebenheiten zu einem Extremum zu machen, heißt nun, geometrisch gesprochen, jene Punkte von G zu ermitteln, die einen extremalen Abstand von der J_2-Achse haben. Diese Punkte können natürlich keine inneren Punkte von G sein, müssen aber auf dem Rande liegen. Damit ist aber ihre Ermittlung leicht zu bewältigen. Wir brauchen ja nur, da wir im Besitz einer Parameterdarstellung der Randkurve sind, $J_1(\lambda)$ als Funktion von λ zum Extremum zu machen, oder, wenn das zweckmäßiger sein sollte, J_1 als Funktion von J_2 nach Elimination von λ. Die in diesem Falle hinreichenden Bedingungen sind so wohl bekannt und auch von uns an anderer Stelle schon erwähnt worden, daß wir darauf verzichten können, sie im einzelnen auszuführen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Notwendigerweise muß für das Eintreten eines Extremums von

$$J_1, \frac{dJ_1}{d\lambda} = 0 \text{ oder auch } \frac{dJ_1}{dJ_2} = 0$$

sein. Daß dieser Ansatz zu denselben Ergebnissen führt, wie die Lösung der Eigenwertgleichung (6′) nach Eintragen der Zwischenlösung y und von J_2 als Funktion von λ, wollen wir jetzt beweisen. Wir setzen zu diesem Zweck

$$E_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_\nu}{\partial y'}, \ (\nu = 1,2) \text{ und erhalten zunächst für } \frac{dJ_2}{d\lambda}:$$

$$\frac{dJ_2}{d\lambda} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial J_2} + \frac{\partial f_2}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial J_2}\right)\frac{dJ_2}{d\lambda}\right] dx$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx + \frac{dJ_2}{d\lambda}\int\limits_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx.$$

Wir haben dabei, wie in der Variationsrechnung üblich,

$$\frac{\partial y'}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial y'}{\partial \lambda}\right) \text{ und } \frac{\partial y'}{\partial J_2} = \frac{\partial}{\partial J_2}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial J_2} = \left(\frac{\partial y'}{\partial J_2}\right)$$

durch partielle Integration in

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \text{ bzw. } \frac{\partial y}{\partial J_2}$$

übergeführt, wobei die aus dem Integralzeichen heraustretenden Glieder verschwinden; denn es ist ja, da für die Zwischenlösung y unabhängig von J_2 und λ, $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ ist,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial J_2} \text{ für } x = x_1 \text{ und } x = x_2 \text{ gleich Null.}$$

Demnach ist

$$\left[1 - \int\limits_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx\right]\frac{dJ_2}{d\lambda} = \int\limits_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx.$$

Ganz entsprechend erhalten wir für

$$\frac{dJ_1}{d\lambda} = \frac{dJ_1}{d\lambda} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial J_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial J_2} + \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\right)$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\frac{dJ_2}{d\lambda}\Big]\, dx = \int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx + \frac{dJ_2}{d\lambda}\left[\int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\, dx\right].$$

Die Elimination von $\frac{dJ_2}{d\lambda}$ aus diesen Gleichungen ergibt

$$\left[1 - \int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx\right] \frac{dJ_1}{d\lambda} = \int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx.\int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx.\int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx.\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\, dx.$$

Nun ist nach (6″) für die Zwischenlösung y, $E_1 + \lambda E_2 = 0$, also

$$\int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx = -\lambda \int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx \text{ und } \int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx = -\frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} E_1 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx.$$

Berücksichtigt man dies, so geht die Gleichung für $\frac{dJ_1}{d\lambda}$ über in

$$\left[1 - \int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial J_2}\, dx\right] \frac{\partial J_1}{d\lambda} = \int_{x_1}^{x_2} E_2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, dx \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\, dx - \lambda\right],$$

und nun folgt sofort durch Division das entscheidende Ergebnis

$$\frac{dJ_1}{dJ_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial J_2}\, dz - \lambda. \qquad (6''')$$

Aus diesem ist zu ersehen, daß in der Tat die Nullstellen von

$$\frac{dJ_1}{dJ_2}$$

längs der Rankurve von G dieselben Eigenwerte liefern wie die Eigenwertgleichung (6′). Darüber hinaus kann aber auch (6″) mit Nutzen zu Kontrollzwecken herangezogen werden bei Überprüfung der Funktionen $J_1(\lambda)$ und $J_2(\lambda)$ auf ihre Richtigkeit. Wir bemerken, daß (6″) die Verallgemeinerung von (3‴) ist. Auch dort wurde G durch Lösen eines isoperimetrischen Problems ermittelt, nur mit der Vereinfachung, daß dort $f_1(x,y,y')$ unabhängig von J_2 war, was

$$\frac{\partial f_1}{dJ_2} = 0$$

zur Folge hat, so daß in der Tat (3‴)

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\frac{dJ_1}{dJ_2} = -\lambda$$

lautet. Nachdem wir so (3''') aufs Neue bewiesen haben, können wir die frühere Schlußweise, die zu (3''') führte, jetzt umkehren. Früher schlossen wir: Da unabhängig von der Funktion Φ die Extremstellen, welche die Eigenwertgleichung (3'') einerseits und die Gleichung

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = 0$$

andererseits liefern, übereinstimmen müssen, so muß notwendig für jedes λ, (3''') bestehen. Jetzt können wir schließen: Nachdem mit (6''') zugleich (3''') auf direktem Wege bewiesen ist, ergibt sich, wie zu erwarten, daß die notwendige Bedeutung

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = 0$$

gerade auf die Eigenwertgleichung (3'') führt. Nach dieser klärenden Rückverweisung stellen wir abschließend fest, daß damit bei beiden Problemen die Grundlagen sowie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Genüge klargestellt sind, so daß weitere Darlegungen allgemeinen Charakters kaum nötig sind. Wir wollen die Erörterungen daher mit der Durchrechnung eines Beispiels V abschließen, das wir wieder in einer Anlehnung an Beispiel II möglichst einfach gestalten wollen. Es liege die Aufgabe vor, wenn l eine gegebene Länge, $x_2 > x_1$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ und

$$J_2 = \frac{1}{l^2} \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

ist, das Funktional

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} (y' - J_2)^2\,dx$$

zu einem Extremum zu machen. Der Faktor

$$\frac{1}{l^2} \text{ in } J_2$$

ist hinzugefügt worden, damit J_2 dieselbe Dimension im physikalischen Sinne erhalte wie der Minuendus y' in J_1, nämlich die einer unbenannten Zahl, wodurch die Rechnung durch Dimensionsbetrachtungen fortlaufend kontrolliert werden kann. Die Integrodifferentialgleichung (6) lautet in diesem Falle

$$y'' - \frac{\lambda}{2\,l^2} = 0,$$

wobei gemäß (6')

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\lambda = -2\int_{x_1}^{x_2} (y' - J_2)\,dx = 2[J_2(x_2-x_1) - (y_2-y_1)]$$

ist. Als Zwischenlösung ergibt sich

$$y = y_1 + \left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{\lambda}{4\,l^2}(x_2-x_1)\right](x-x_1) + \frac{\lambda}{4\,l^2}(x-x_1)^2,$$

und hieraus

$$J_2(\lambda) = \frac{1}{l^2}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{x_2-x_1}{l^2}\left[\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{\lambda}{24\,l^2}(x_2-x_1)^2\right],$$

wodurch wir für λ die Eigenwergleichung

$$\lambda = 2\left\{\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}\left[\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{\lambda}{24\,l^2}(x_2-x_1)^2\right] - (y_2-y_1)\right\}$$

erhalten, die diesmal sogar linear sind. Als einziger Eigenwert λ_0 ergibt sich

$$\lambda_0 = \frac{24\,l^2\left[(x_2-x_1)^2\,\dfrac{y_1+y_2}{2} - l^2(y_2-y_1)\right]}{12\,l^4 + (x_2-x_1)^4},$$

und für diesen liefert die Zwischenlösung y möglicherweise ein Extremum. Daß dies tatsächlich eintritt, zeigen wir, indem wir jetzt zu den hinreichenden Bedingungen übergehen und hierzu unter Verwendung der Zwischenlösung und der ermittelten Funktion $J_2(\lambda)$ noch

$$J_1(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (y' - J_2)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx - 2J_2(y_2-y_1) + J_2^2(x_2-x_1)$$

berechnen. Unter Heranziehung des für

$$\int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx$$

früher ermittelten Wertes finden wir

$$J_1(\lambda) = \frac{1}{x_2-x_1}\left[(y_2-y_1) - \frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}\,\frac{y_1+y_2}{2}\right]^2 + \frac{(x_2-x_1)^3}{12\,l^4}$$

$$\left[(y_2-y_1) - \frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}\,\frac{y_1+y_2}{2}\right]\lambda + \frac{(x_2-x_1)^3}{48\,l^4}\left[1 + \frac{(x_2-x_1)^4}{12\,l^4}\right]\lambda^2.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951

Digitale Bibliothek Braunschweig

Wir bilden jetzt zunächst

$$\frac{dJ_1}{dJ_2} = -2\left[(y_2-y_1) - \frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}\frac{y_1+y_2}{2}\right] - \left[1+\frac{(x_2-x_1)^4}{12\,l^4}\right]\lambda$$
$$= 2\left\{\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}\left[\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{\lambda}{24\,l^2}(x_2-x_1)^2\right] - (y_2-y_1)\right\} - \lambda$$

und stellen fest, daß (6''') tatsächlich erfüllt ist, was zur Kontrolle der Rechnung dient, aber auch zeigt, daß die Gleichung

$$\frac{dJ_1}{dJ_2} = 0$$

zu demselben Eigenwert λ_0 führt, den wir schon ermittelt haben. Da

$$\frac{d^2J_1}{d^2J_2^2} = \frac{576\,l^7}{(x_2-x_1)^6}\frac{d^2J_1}{d\lambda^2} = \frac{2}{(x_2-x_1)^3}\left[12\,l^4 + (x_2-x_1)^4\right] > 0$$

ist, so liefert die Zwischenlösung y für $\lambda = \lambda_0$ ein Minimum. Das wird besonders anschaulich klar, wenn wir dazu übergehen, das Grundgebiet G in der J_1J_2-Ebene zu ermitteln, das den Funktionalen J_1 und J_2 zugänglich ist. Seine Randkurve ist die durch $J_1 = J_1(\lambda)$ und $J_2 = J_2(\lambda)$ in Parameterdarstellung gegebene Parabel, die ebenso verläuft wie die Randkurven der Grundgebiete, in den Bildern 2 und 3. Hier wie dort ist auch G das Innere dieser Kurve, da, wie die hinreichenden Bedingungen der Variationsrechnungen lehren, J_1 bei festem J_2 ein absolutes starkes Minimum hat bei beliebigem x_2-x_1. Eine nochmalige zeichnerische Darstellung erübrigt sich wohl durch den Hinweis auf Bild 2 und 3. Man sieht jetzt deutlich, daß der Kleinstwert von J_1 im Scheitel der Parabel erreicht wird, dem der Parameterwert $\lambda = \lambda_0$ zugeordnet ist. Dieses Extremum ist das einzig mögliche, wie ja auch bei diesem Problem die Eigenwertgleichung linear ist. Das Minimum von J_1 ist offenbar für alle $x_2-x_1>0$ absolut ohne jede Einschränkung hinsichtlich der Vergleichsfunktionen y(x) und obendrein stark.

Literatur

[1] *Bolza, O.:* Vorlesungen über Variationsrechnung, Koehler-Verlag, Leipzig 1933.

[2] *Carathéodory, C.:* Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung 1935, S. 148–160, Leipzig und Berlin, Teubner-Verlag.

[3] Functional Analysis und Applications (Symposium Recife), Brasil 1972. Lectures Notes in Mathematics Nr. 384.

[4] Functional Differential Equations and Approximations of Fixed points. Proceedings, Bonn 1978. Lecture Notes in Mathematics Nr. 730.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052951